04.01.02. PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO SVILUPPATO SUL PARALLELISMO TRA PIANI

In aggiunta alla procedura già discussa ai punti precedenti e basata sul parallelismo tra la retta data ed una retta del piano, possiamo sviluppare anche discussioni di verifica del concetto di parallelismo tra la retta r ed il piano α sulla base delle leggi del parallelismo tra piani, come nel disegno di seguito (Fig.23). Determinate, pertanto, le tracce T_{1s} e T_{2s} di una retta s parallela alla retta data, per queste conduciamo le tracce di un piano β che, per costruzione, deve essere parallelo al piano dato α, che in forma sintetica si esprime come $s \in \beta // \alpha$. Per questo dovrà essere $t_{1\beta} // t_{1\alpha}$ ed anche $t_{2\beta} // t_{2\alpha}$.

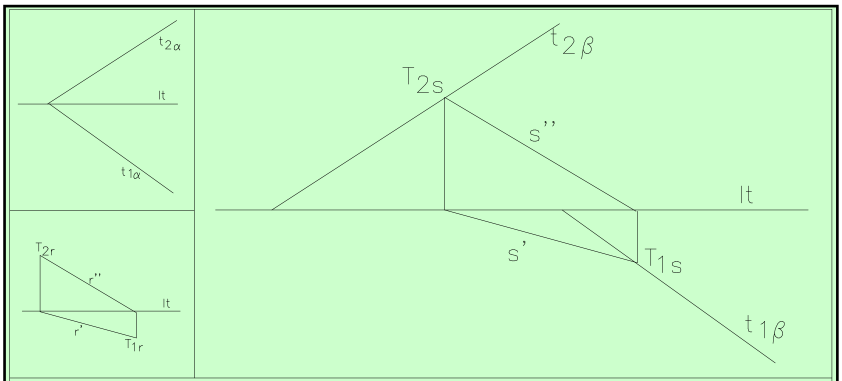


Fig.23–Parallelismo tra retta e piano e verifica mediante il parallelismo tra piani

Le rette così definite e qualificate come tracce di β, si presentano graficamente parallele ma non si caratterizzano come tracce di un piano in quanto non sono incidenti la lt. Per questo motivo le due rette identificate come $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$, pur contenendo le tracce della retta s, parallela alla retta data, e costruite parallele alle tracce del piano dato α, non definiscono il piano β in quanto ($t_{1\beta} \not\equiv \beta, t_{2\beta} \not\equiv \beta$). Si può, quindi, concludere che:

$$\boxed{s \notin \beta // \alpha} \quad [1]$$

perché le tracce di β non si caratterizzano come tracce di un piano.

Avendo stabilito per costruzione, poi,

$$\boxed{r // s} \quad [2],$$

operando gli scambi tra la [1] e la [2] si può sviluppare quanto di seguito.

Se $\boxed{r // s}$ sostituendo nella [1] si ha $\boxed{r // s \notin \beta // \alpha}$ quindi

$\boxed{r // s \angle \beta // \alpha}$ pertanto sarà $\boxed{r // s \angle \alpha}$ da cui

infine

$$\boxed{r \angle \alpha}$$

Oltre la verifica di cui sopra, impostata sulla ipotesi dell'appartenenza di r ad un piano β parallelo al piano dato α che, non si caratterizza come piano; si può impostare la dimostrazione direttamente con le condizioni di parallelismo tra piani (Fig.24).

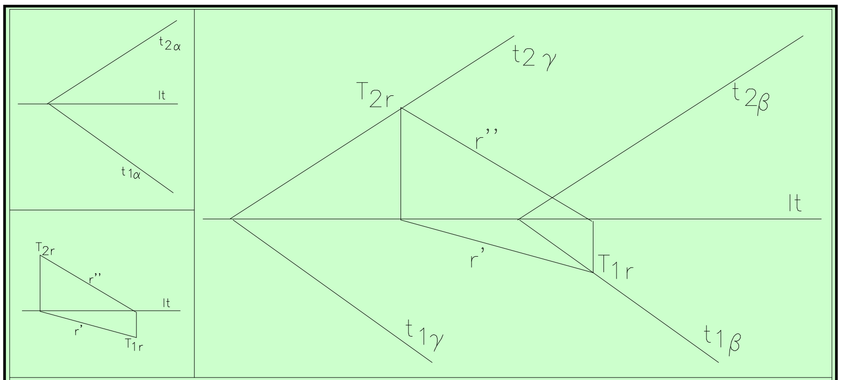


Fig.24–Parallelismo tra retta e piano, verifica con il parallelismo tra piani (altro procedimento)

Applicando direttamente il concetto del parallelismo tra piani accade che per le tracce della retta $r(T_{1r};T_{2r})$ si devono condurre due piani distinti β e γ paralleli al piano dato e contenenti ciascuno una sola traccia della retta. Infatti,il piano $\beta//\alpha$ contiene solamente la T_{1r} così come il piano $\gamma//\alpha$ contiene solo la T_{2r}.

Ne discende che i due piani β e γ pur essendo paralleli al piano dato α non contenendo la retta r rendono esplicito che i due elementi non sono tra loro paralleli e, quindi la retta r è obliqua al piano α e, viceversa, il piano α è obliquo alla retta r.

04.01.02.01. INDAGINE ESPLICATIVA O DEDUTTIVA

Allora accade che se definiamo per T_{1r} la traccia $t_{1\beta}//t_{1\alpha}$, nel disporre, graficamente, la traccia $t_{2\beta}//t_{2\alpha}$ questa non passa per T_{2r}; al contrario, se costruiamo per T_{2r} il parallelismo in modo tale che sia $t_2\gamma//t_2\alpha$, nel definire graficamente la traccia $t_{1\gamma}//t_{1\alpha}$, riscontriamo che questa non passa per T_{1r} e quindi non verifica la condizione di appartenenza tra retta e piano.

In entrambi i casi i piani β e γ costruiti parallelamente al piano dato α, non contengono la retta data r.

Resta cosi' dimostrato che, poiché $r\notin\beta//\alpha$, ed anche $r\notin\gamma//\alpha$ allora neanche la retta r sarà parallela al piano α e quindi si deduce che $r \angle \alpha$.

In forma sintetica si ha:

$$\boxed{r \notin \beta // \alpha} \longrightarrow \boxed{r \angle \alpha}$$

Invece può accadere, come nel disegno di seguito (Fig. 25), che, dati gli elementi geometrico-rappresentativi dei due componenti r' ed r" per la retta r e $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ per il piano α, costruendo per r un piano β parallelo al piano α dato questo verifichi, oltre le condizioni di contenenza tra β ed r, anche le condizioni di parallelismo tra il piano β ed il piano α.

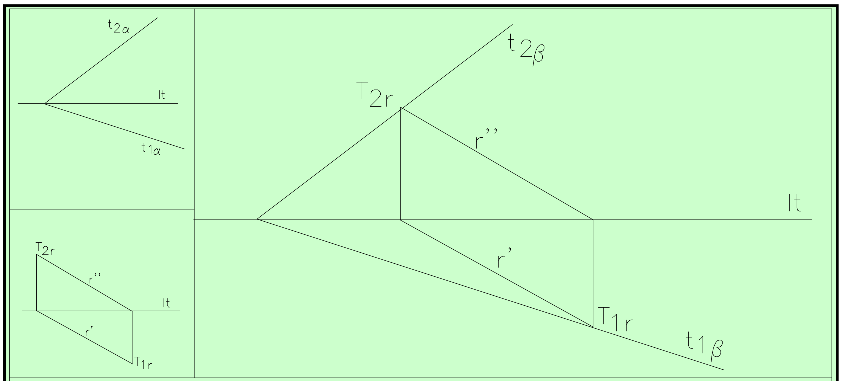


Fig.25–Parallelismo tra retta e piano

In questa situazione si ha la seguente formalizzazione deduttiva.

$$\left.\begin{array}{l} t_{1\beta} // t_{1\alpha} \\ t_{2\beta} // t_{2\alpha} \end{array}\right\} \rightarrow \beta // \alpha \Rightarrow s^{\infty}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_{1r} \in t_{1\beta} \\ T_{2r} \in t_{2\beta} \end{array}\right\} \rightarrow r \in \beta$$

$$r \in \beta // \alpha \rightarrow r // \alpha$$

Ragionando sullo schema di cui sopra si riscontra che i due piani α e β si qualificano, geometricamente, come piani paralleli generando una retta impropria s^{∞}, quindi è $\beta//\alpha$.

Inoltre il piano β, costruito parallelo al piano dato α, verifica la condizione geometrica della inclusione della retta data r, quindi è $r \in \beta$.

Riunificando i due concetti ed eseguendo le relative sostituzioni simboliche si ha che la retta r appartiene al piano β che, a sua volta, è parallelo al piano α. Da ciò ne discende, come conseguenza logica, che $r//\alpha$.

Sinteticamente si ha la seguente formalizzazione:

$$r \in \beta // \alpha \rightarrow r // \alpha$$

Sulla base di queste risultanze, infine, si può enunciare la seguente legge descrittiva.

Dati un piano ed una retta, se la retta data appartiene ad un piano parallelo a quello dato, allora, e sola allora possiamo asserire che la retta è parallela al piano.

Ampliando, inoltre, l'espressione di cui sopra, con il concetto di retta impropria si ha la seguente enunciazione.

Dati una retta ed un piano, se la retta appartiene ad un piano che, intersecandosi con il piano dato, genera una retta impropria, allora si può asserire che gli elementi geometrici sono paralleli tra loro.

04.01.02.02. PROCEDURA IMPOSITIVA O APPLICATIVA

Se la condizione geometrica in discussione deve essere imposta o applicata nel corso di una elaborazione grafica; allora è necessario operare, graficamente in modo tale che si verifichino le relazioni di cui si è discusso al punto precedente. Pertanto perché una retta sia parallela ad un piano è necessario che appartenga ad un piano che ha le tracce parallele alle tracce del piano dato. Conseguentemente la definizione impositiva della condizione in esame può essere espressa in forma verbale come di seguito.

Una retta è parallela ad un piano se appartiene ad un piano parallelo a quello dato.

Questa definizione verbale può essere espressa in forma sintetica nel modo seguente:

$$\boxed{r \,//\, \alpha} \longrightarrow \boxed{r \in \beta \wedge \beta \,//\, \alpha}$$

Questa enunciazione teorica può essere riassunta e sintetizzata con la seguente formalizzazione applicativa in forma insiemistico-descrittiva.

$$\boxed{r//\alpha} \longrightarrow \boxed{r \in \beta \,//\, \alpha} \longrightarrow \boxed{\beta \cap \alpha \Rightarrow s^{\infty}}$$

$$\boxed{\begin{matrix} T_{1r} \in t_{1\beta} \\ T_{2r} \in t_{2\beta} \end{matrix}} \quad \text{dove} \quad \left\{ \begin{matrix} T_{1r} = r \cap \pi_1 \; ; \; t_{1\beta} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{1r} \right\} \\ T_{2r} = r \cap \pi_2 \; ; \; t_{2\beta} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{2r} \right\} \end{matrix} \right.$$

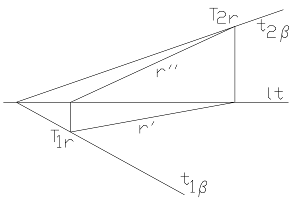
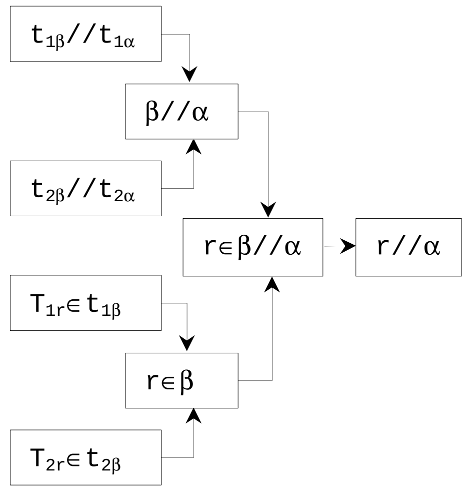
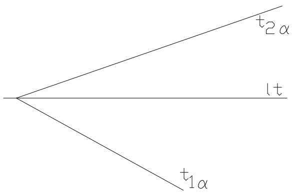
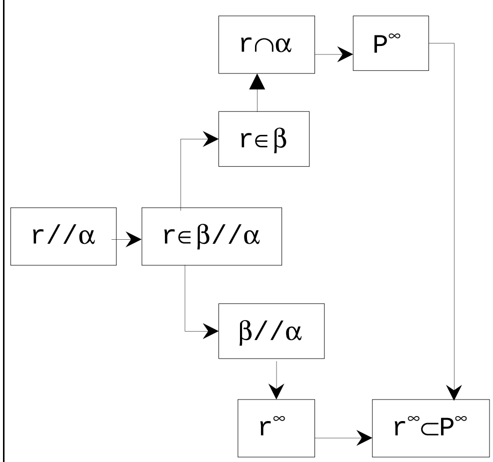
$$\boxed{\begin{matrix} t_{1\alpha}//t_{1\beta} \Rightarrow T_{1s}^{\infty} \\ t_{2\alpha}//t_{2\beta} \Rightarrow T_{2s}^{\infty} \end{matrix}} \quad \text{dove} \quad \left\{ \begin{matrix} t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{1a} \right\} ; \; t_{1\beta} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{1r} \right\} \\ t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{2a} \right\} ; \; t_{2\beta} = \sum_{-\infty}^{\to+\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{2r} \right\} \end{matrix} \right.$$

La definizione può essere ampliata includendo anche il concetto di retta impropria; allora si ha la seguente enunciazione.

Una retta è parallela ad un piano se per essa è possibile condurre un piano che intersecandosi con quello dato genera una retta impropria.

$$\boxed{r \,//\, \alpha} \longrightarrow \boxed{r \in \beta \mid \beta \cap \alpha \rightarrow s^{\infty}}$$

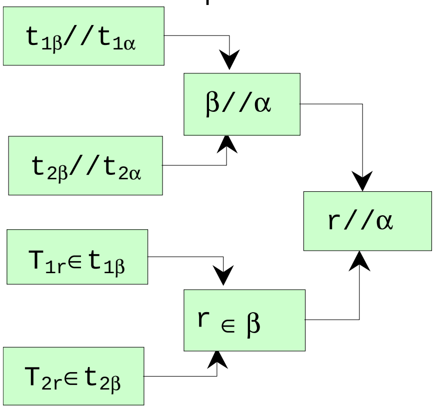
04.01.01.03.QUADRO SINTETICO DELLA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO SVILUPPATO SUL PARALLELISMO TRA PIANI

CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI						PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO BASATO SUL PARALLELIMO TRA PIANI	
Elemento geometrico	Didascalia elemento	Didascalia elemento rappresentativo	Nomenclatura elemento rappresentativo	Definizione geometrica dell’elemento rappresentativo	Definizione fisica dell’elemento rappresentativo	Definizioni grafica e descrittiva degli elementi geometrici	Relazione insiemistica sintetica delle leggi del parallelismo tra elementi geometrici diversi
Retta	r	T_{1r}	1ª traccia	punto	reale		Formalizzazione esplicativa 
		T_{2r}	2ª traccia	punto	reale		
		r’	1ª immagine o 1ª proiezione	retta	virtuale		
		r"	2ª immagine o 2ª proiezione	retta	virtuale		
Piano	α		1ª traccia	retta	reale		Formalizzazione applicativa 
			2ª traccia	retta	reale		

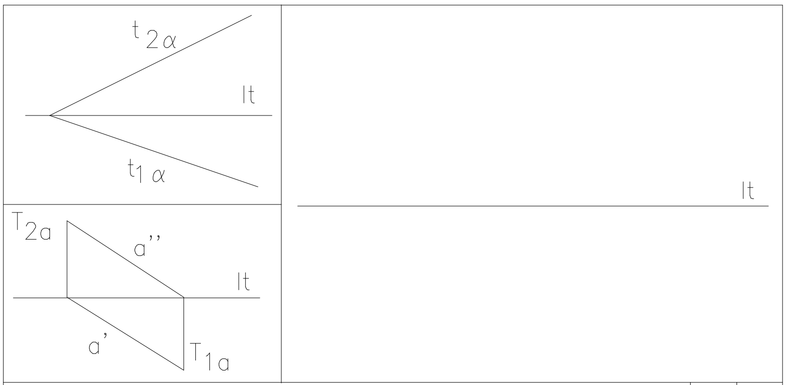
04.01.02.04.ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA O DEDUTTIVA

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative al parallelismo tra retta e piano basato sul parallelismo tra piani.

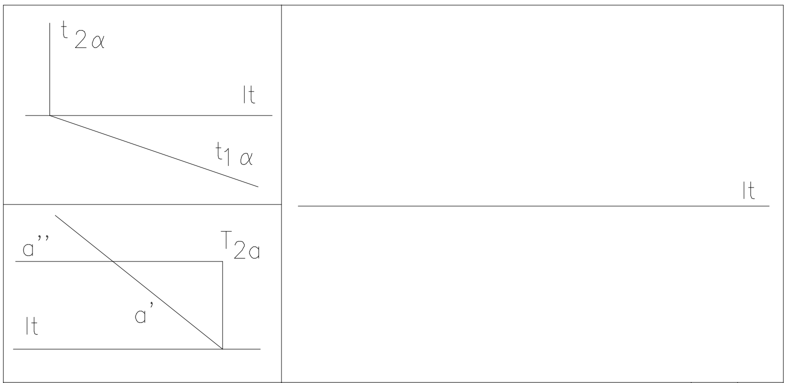
Data la seguente formalizzazione esplicativa risolvere i quesiti a lato



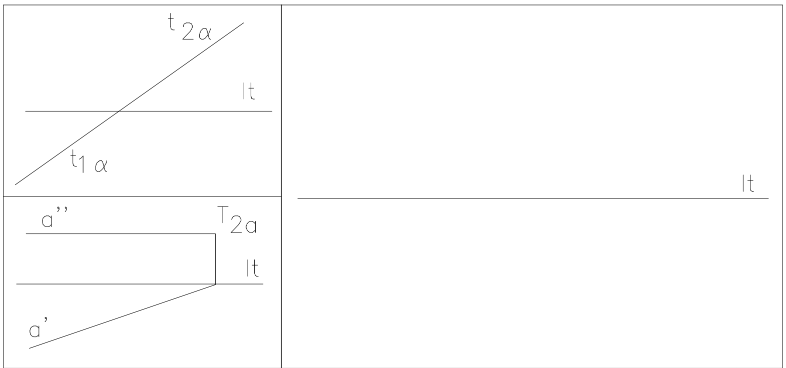
Considerazioni e note



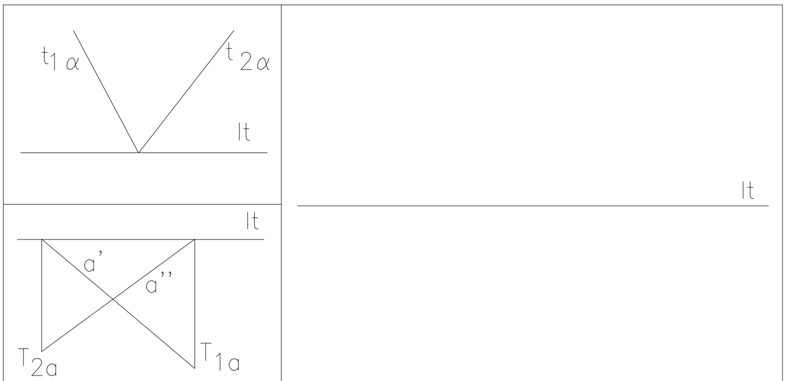
Esercizio 31– La retta è parallela al piano? SI NO



Esercizio 32– La retta è parallela al piano? SI NO



Esercizio 33– La retta è parallela al piano? SI NO

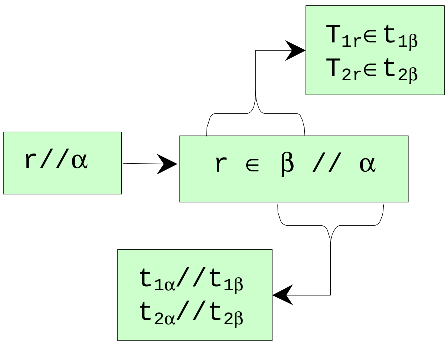


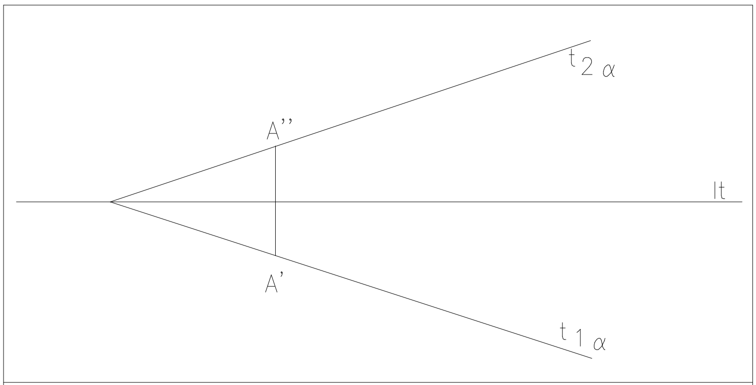
Esercizio 34– La retta è parallela al piano? SI NO

04.01.02.05.ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA O IMPOSITIVA

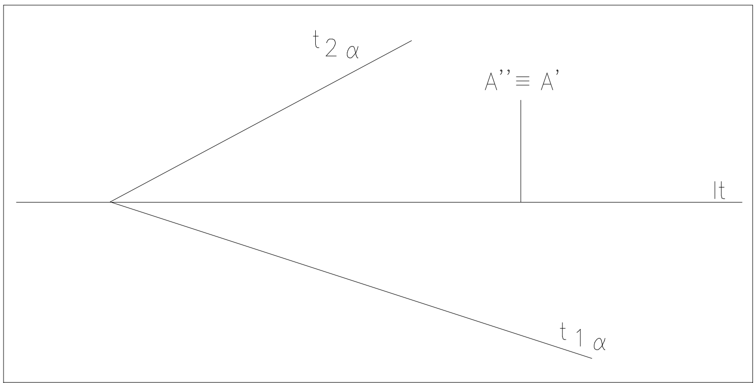
Seguono alcune esemplificazioni grafiche riferite all'aspetto applicativo del parallelismo tra retta e piano basato sul parallelismo tra piani.

Data la seguente formalizzazione applicativa, risolvere i quesiti a lato.

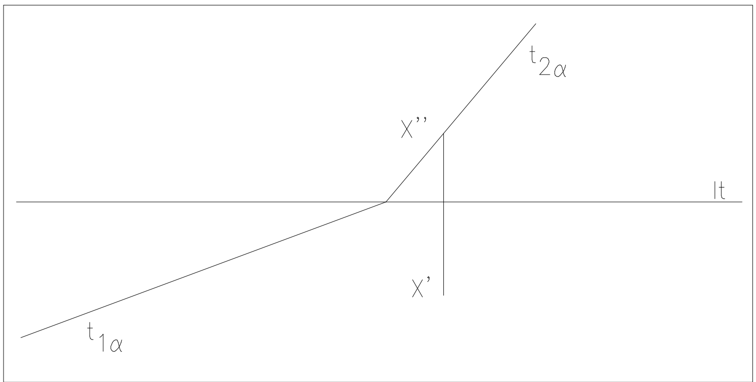




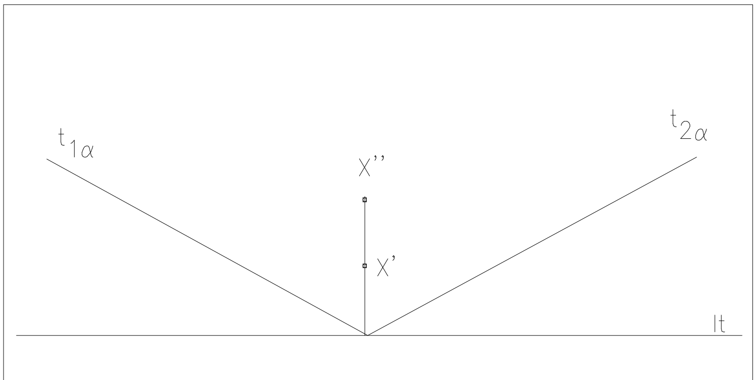
Esercizio 35– Costruire per A una retta $r // \alpha$



Esercizio 36– Costruire per A una retta $r // \alpha$



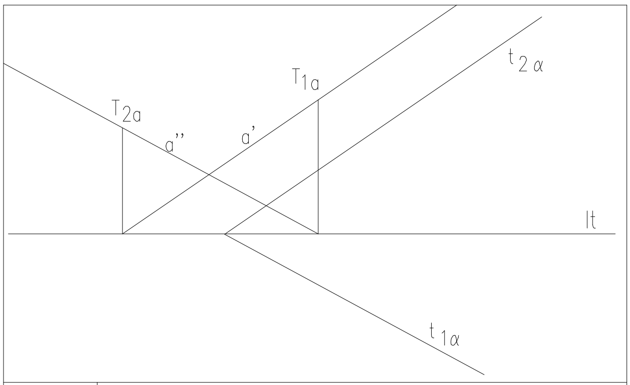
Esercizio 37– Costruire per X un piano $\beta // \alpha$



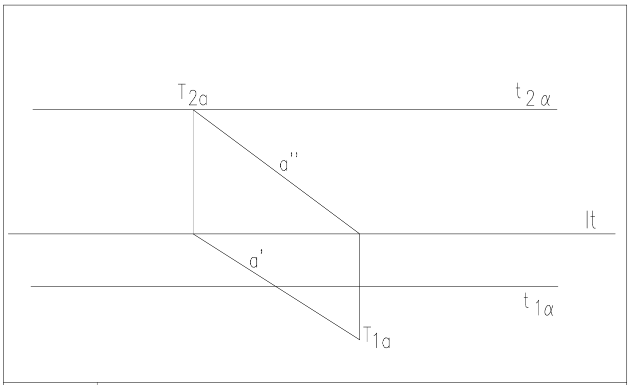
Esercizio 38– Costruire per X un piano $\beta // \alpha$

Considerazioni e note

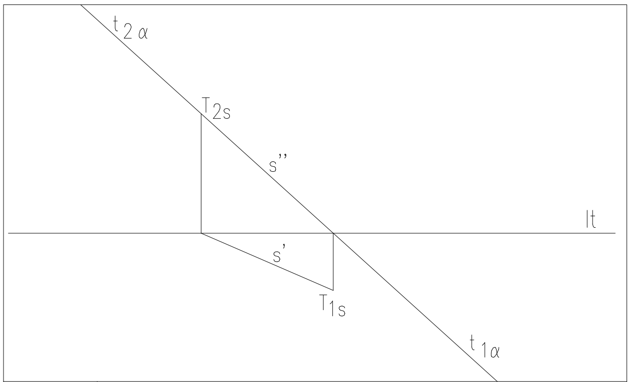
04.01.02.06. PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLE CONDIZIONI DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO DA RISOLVERE MEDIANTE IL PARALLELISMO TRA PIANI



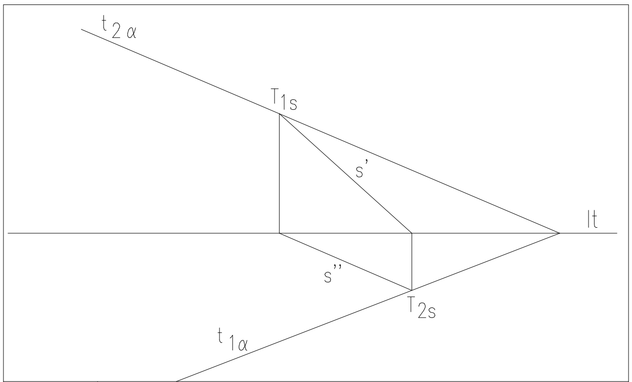
Tema 33 Verificare se $a // \alpha$



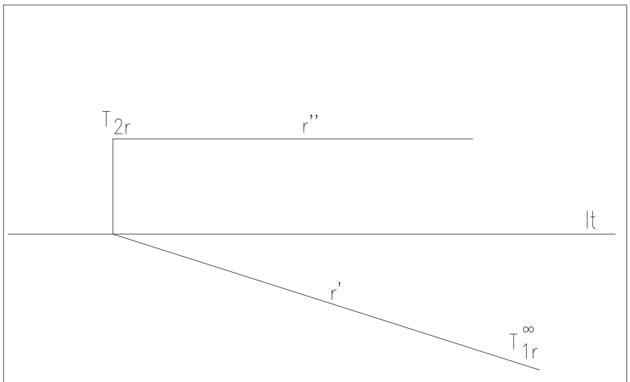
Tema 34 Verificare se $a // \alpha$



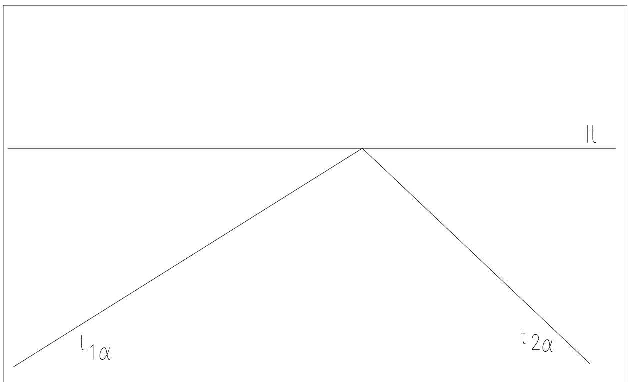
Tema 35 Verificare se $s // \alpha$



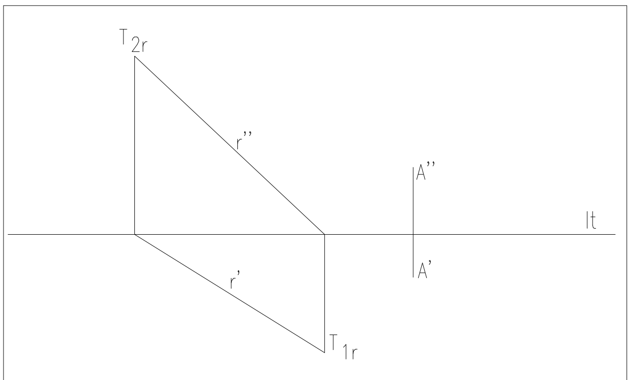
Tema 36 Verificare se $s // \alpha$



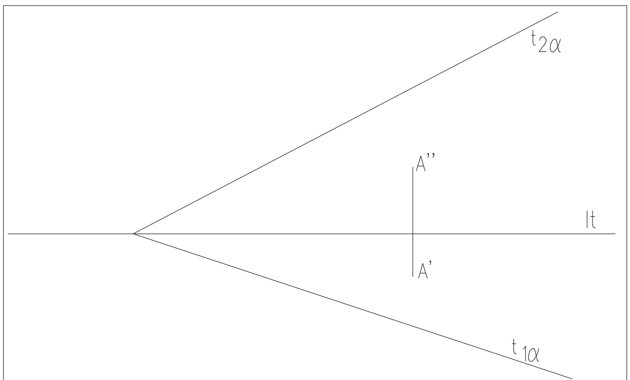
Tema 37 Costruire $\alpha // r$



Tema 38 Costruire $r // \alpha$



Tema 39 Costruire $(\alpha \subset A) // r$



Tema 40 Costruire $(r \subset A) // \alpha$

04.01.02.07. TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI

01. Dati la retta r(T_{1r}=3; T_{2r}=6) ed il punto A(A'=1; A''=3) definire e rappresentare un piano α tale che sia ($\alpha\subset$A)//r.
02. Dati la retta s(T_{1s}=-4; T_{2s}=8) ed il punto B(B'=3; B''=5) definire e rappresentare un piano β tale che sia ($\beta\subset$B)//s.
03. Dati $r\subset\begin{cases}A(A'=3;\ A''=7)\\B(B'=5;\ B''=1)\end{cases}$ ed il punto C(C'=-1; C''=-7) definire e rappresentare un piano α tale che sia ($\alpha\subset$C)//r$\subset$(A,B).
04. Dati $s\subset\begin{cases}X(X'=-3;\ X''=7)\\Y(Y'=7;\ Y''=-3)\end{cases}$ ed il punto W(W'=3; W''=3) definire e rappresentare un piano β tale che sia ($\beta\subset$W)//s$\subset$(X,Y).

05. Dati la rette a($\angle\pi_1^+$; $\angle\pi_2^+$) ed un punto L$\notin$a, definire e rappresentare un piano ($\alpha\subset$b)//a|α($\angle\pi_1^-$; $\angle\pi_2^+$).
06. Dati la retta b($\angle\pi_1^-$; $\angle\pi_2^+$) ed un punto M$\notin$b definire e rappresentare un piano ($\beta\subset$M)//b|β($\angle\pi_1^+$; $\angle\pi_2^+$; //lt).
07. Dati il piano α($\angle\pi_1^-$; $\angle\pi_2^+$; //lt) ed un punto A$\notin\alpha$ definire e rappresentare la retta (r$\subset$A)//α.
08. Dati il piano β($\perp\pi_1^+$; $\angle\pi_2^+$) ed un punto B$\notin\beta$ definire e rappresentare la retta (s$\subset$B)//β.

09. Dati i seguenti punti A(A'=3; A''=5), B(B'=6;B''=1), C(C'=4; C''=4), D(D'=1; D''=6), definire e costruire il piano $\alpha\subset$(A,B,C), quindi condurre per D una retta s tale che sia s//α.
10. Dati i punti seguenti E(E'=1; E''=6), F(F'=1; F''=1), G(G'=3; G''=3); H(H'=6; H''=2), verificare se la retta a$\subset$(E,F) è parallela alla retta b$\subset$(G,H).
11. Dati i punti A(A'=-3; A''=6), B(B'=-5; B''=1), C(C'=-7; C''=3) definire e rappresentare il piano $\alpha\subset$(A,B,C) quindi per un punto X(X'=6; X''=-2) costruire e rappresentare la retta (s$\subset$X)//b$\subset$(A,B)$\wedge$ β//α|$\beta\subset$s.
12. Dati i punti D(D'=7; D''=3), E(E'=5; E''=1), F(F'=3; F''=6) definire e rappresentare il piano $\gamma\subset$(D,E,F) quindi per un punto Y(Y'=2; Y''=-6) costruire e rappresentare la retta (r$\subset$Y)//a$\subset$(E,F)$\wedge$ δ//γ|$\delta\subset$r.