## 02.03. APPARTENENZA E/O CONTENENZA TRA PUNTO E PIANO

### 02.03.01. INDAGINE ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

Nel terzo caso prendiamo in considerazione il punto P ed il piano α per stabilire le leggi specifiche dell'appartenenza e/o della contenenza tra i due elementi, come sintetizzato dalla seguente espressione.

$$P \in \alpha \iff \alpha \subset P$$

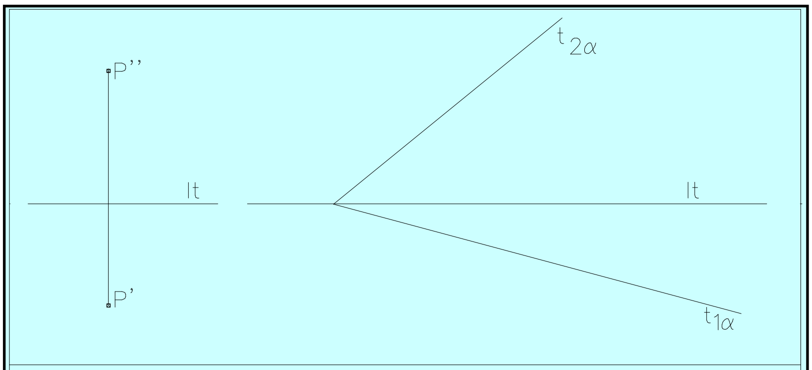


Fig.25–Punto e piano nel I diedro

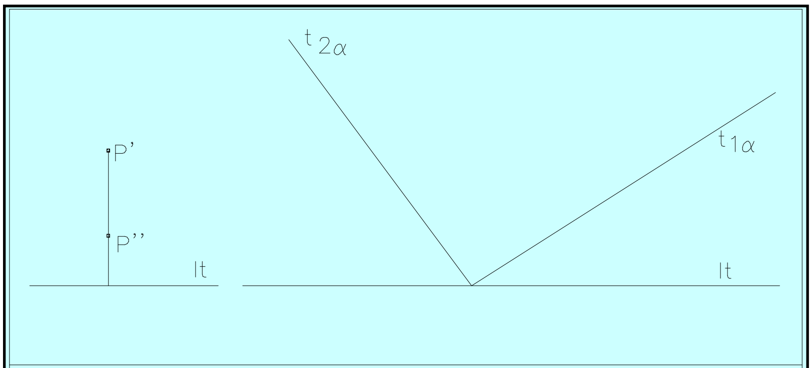
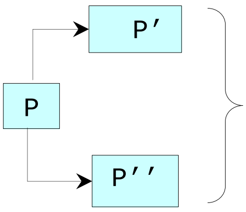


Fig.26–Punto e piano nel II diedro

I due elementi, singolarmente e nei vari diedri, sono rappresentati descrittivamente come di seguito (Fig.25, Fig.26).

Come evidenziato nel quadro sintetico (Tabella-A-) del paragrafo iniziale, queste due entità geometriche, così rappresentate, sono prive di elementi geometrico-rappresentativi aventi le stesse proprietà geometriche e le stesse caratteristiche fisiche, quindi non sono suscettibili di sostenere confronti e considerazioni per la ricerca di legami logici e leggi descrittive di appartenenza e/o contenenza.

Infatti, mentre il punto P si rappresenta, descrittivamente, mediante le proiezioni che si caratterizzano, dal punto di vista geometrico, come due punti P' e P'' che assumono l'aspetto di due punti virtuali,



Il punto ed i suoi elementi rappresentativi il piano $\alpha$ si rappresenta mediante le tracce che sono due rette reali, $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$. Esse si caratterizzano per essere costituite dalla sommatoria dell'insieme delle tracce della retta generatrice che sono punti; ma punti reali, tanto che si ha:

$$\alpha \begin{cases} t_{1\alpha} = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{1r} \right\} & [7] \\ t_{2\alpha} = \displaystyle\sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{T}}_{2r} \right\} & [8] \end{cases}$$

Il piano ed i suoi elementi rappresentativi

Pertanto le due rappresentazioni ortogonali, essendo diverse sia negli elementi geometrico-rappresentativi che nelle specifiche caratteristiche fisiche, non si prestano per eventuali discussioni di ricerca di legami e leggi specifiche.

A questo punto è necessario ricordare che la retta r (retta punteggiata), date le sue caratteristiche geometrico-rappresentative, si presta a fare da elemento di collegamento, di congiunzione e connettivo tra gli altri due elementi geometrici: il punto P ed il piano $\alpha$. Essa infatti viene rappresentata mediante quattro elementi: due tracce $T_{1r}$, $T_{2r}$ e due proiezioni r', r'' che ci danno la possibilità di legare tra loro i due elementi in discussione che, altrimenti, resterebbero distinti e non confrontabili. Quindi nelle operazioni di ricerca e/o imposizione delle leggi di appartenenza e/o contenenza ($\in/\subset$) tra un punto ed un piano è necessario prendere in considerazione tutti e tre gli elementi geometrici.

Inoltre è bene ricordare – nuovamente- che il piano può essere riguardato sia come superficie rigata, espressa dalla seguente simbologia descrittiva:

$$\pi = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{r}} \right\} \qquad [9]$$

che come superficie punteggiata, espressa dalla seguente simbologia descrittiva.

$$\pi = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overline{\overline{P}} \right\} \qquad [10]$$

Analizziamo ora alcune possibili situazioni grafiche che possono facilmente indurre in errore (Fig.27, Fig.28, Fig.29, Fig. 30).

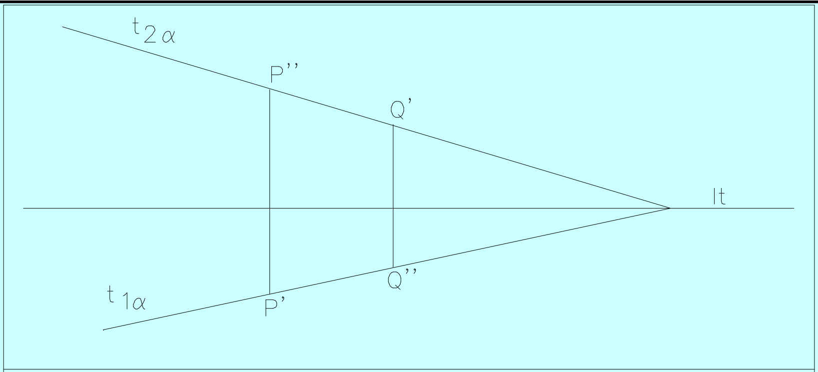


Fig.27–I Diedro–Punti P,Q non appartenenti al piano $\alpha$

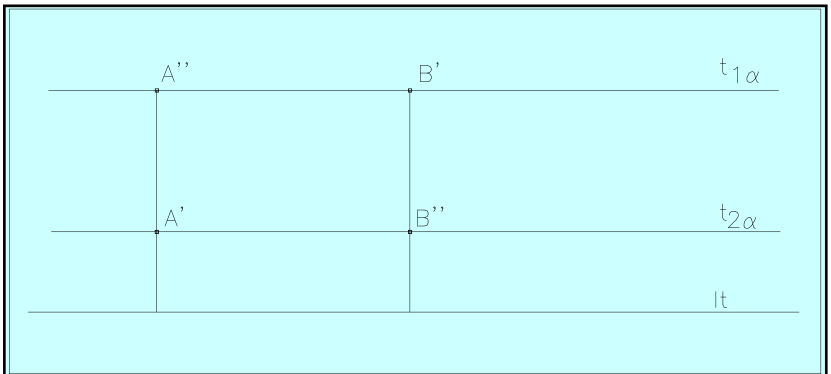


Fig.28–IIDiedro–Punti A,B non appartenenti al piano $\alpha$

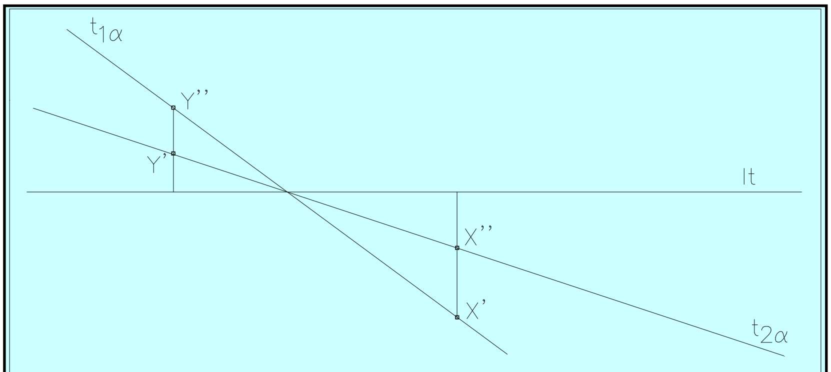


Fig.29–IIIDiedro–Piano $\alpha$ che non contiene i punti X,Y

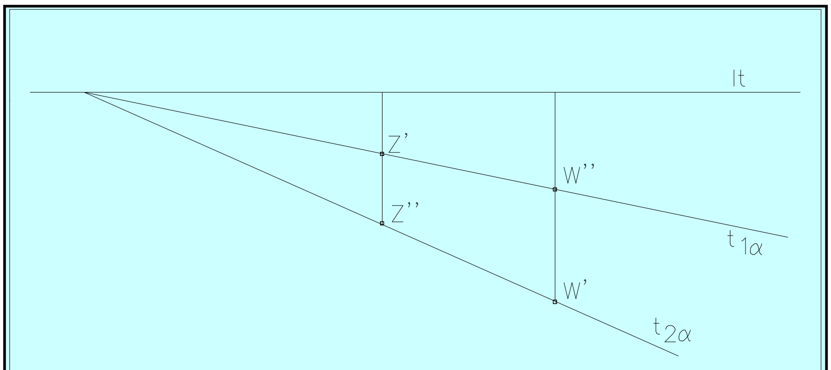


Fig.30–IVDiedro–Piano $\alpha$ che non contiene i punti W,Z

Nei casi di queste figure possiamo affermare che $P \notin \alpha$ in quanto la condizione di appartenenza è solo apparente, non potendosi stabilire alcun termine di paragone e di discussione descrittiva tra il punto P rappresentato dalle due proiezioni P’ e P’’ che sono - dal punto di vista geometrico-descrittivo- due punti virtuali, ed il piano che, al contrario, è rappresentato dalle due tracce $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ che, come tali, sono due rette reali in quanto costituite dall’insieme della sommatoria delle tracce delle rette $t=\sum T$ e quindi di punti reali.

Riscontrato quanto di sopra si possono avere le situazioni grafiche come quelle esemplificare di seguito dalla fig.31 e dalla fig. 32.

Analizziamo, ora, queste due situazioni grafiche.

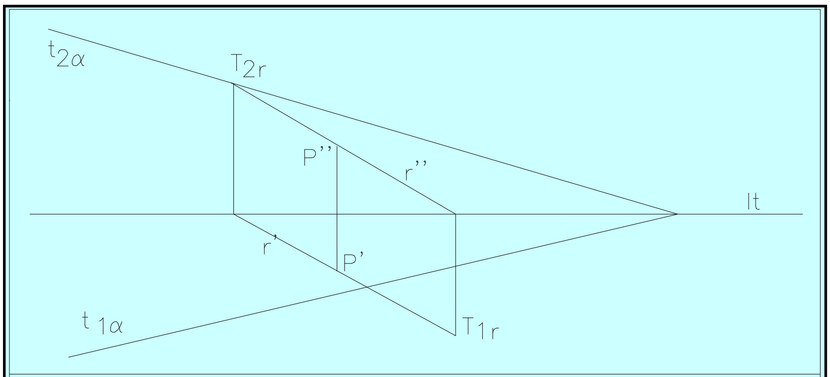


Fig.31–IDiedro–Punto P non appartenente al piano $\alpha$

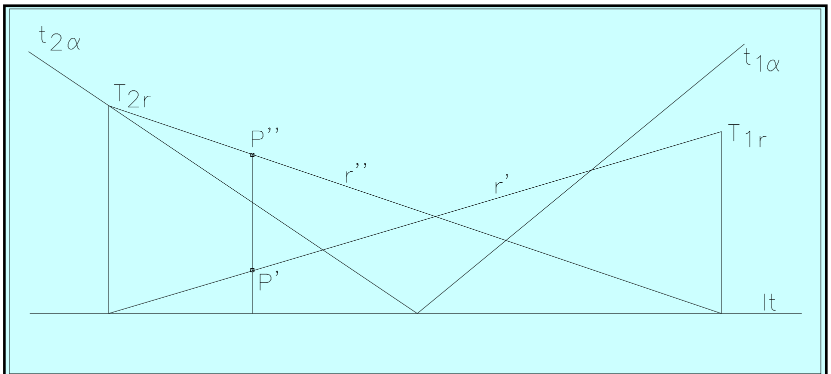


Fig.32–IIDiedro–Punto P non appartenente al piano $\alpha$

In questo caso accade che il punto $P \in r$ in quanto verifica la [2] perché $P' \in r'$ e verifica anche la [3] perché $P'' \in r''$, ma la retta $r \notin \alpha$ in quanto, pur rispondendo alla [8] $T_{2r} \in t_{2\alpha}$ non verifica, contemporaneamente la [7] dato che $T_{1r} \notin t_{1\alpha}$.

Pertanto in questa situazione siamo in presenza di un legame descrittivo parziale, tra i tre elementi geometrici, per cui non si verifica totalmente il concetto espresso nella trattazione di questo argomento.

Data questa incompletezza di legami possiamo affermare, quindi, che il punto non appartiene al piano, cioè, in forma insiemistica: $P \notin \alpha$.

L'espressione sintetica si esplicita come di seguito:

$$\boxed{P \in r \notin \alpha \Rightarrow P \notin \alpha}$$

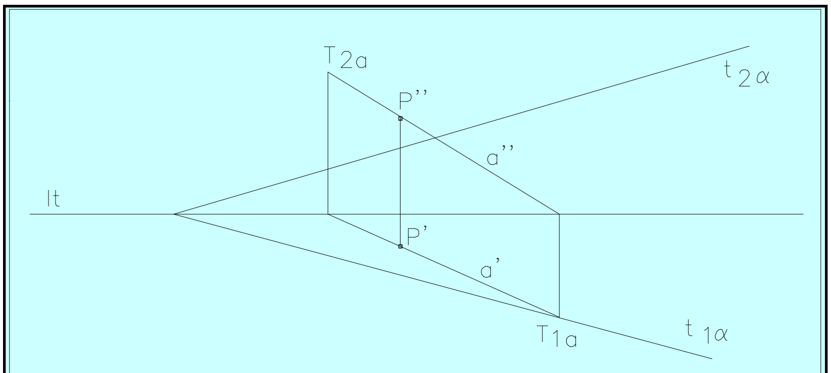


Fig.33–IDiedro–Punto P non appartenente al piano $\alpha$

Le considerazioni di cui sopra possono essere sviluppate e confermate anche per i casi reciproci illustrati, graficamente, nelle rappresentazioni ortogonali come alle figure di seguito (Fig. 33, Fig. 34). Infatti, in

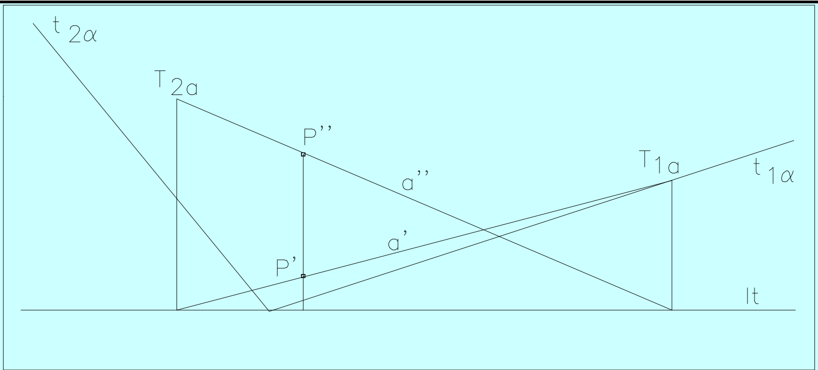


Fig.34–IIDiedro–Punto P non appartenente al piano α

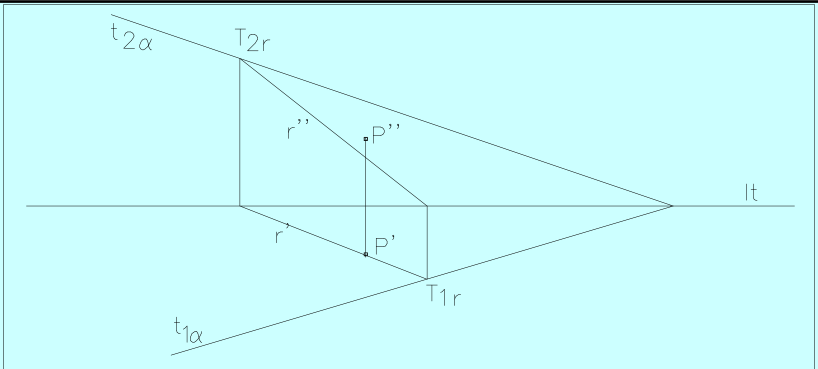


Fig.35–I Diedro–Punto P che non appartiene al piano α

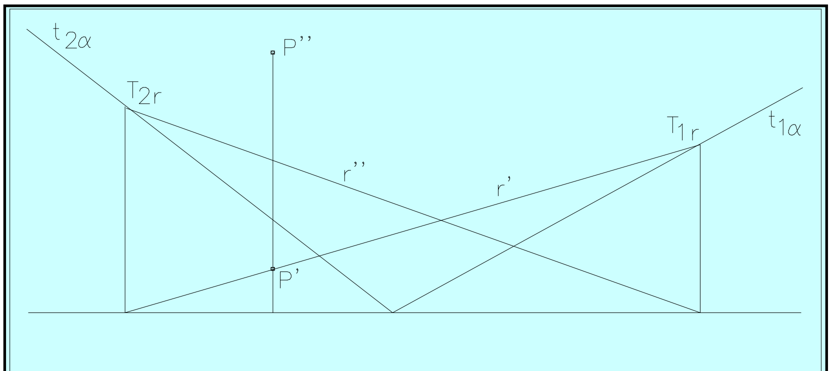


Fig.36–II Diedro–Punto P che non appartiene al piano α

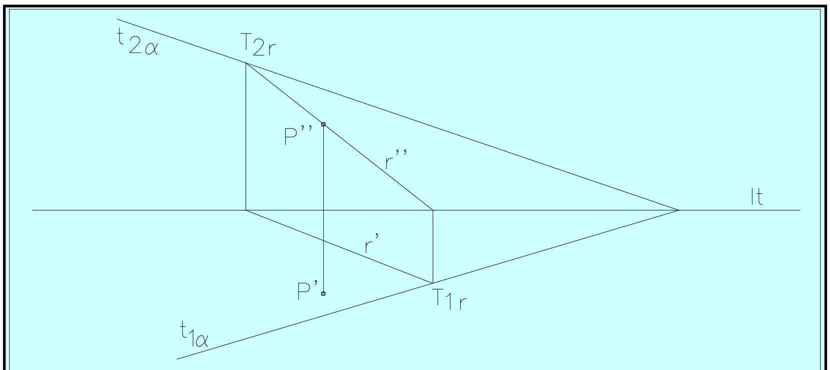


Fig.37–I Diedro–Punto P che non appartiene al piano α

questo caso possiamo affermare che $P \notin \alpha$ perché si verificano sia la condizione [2] che la condizione [3] che la condizione [7] ma non la condizione [8] e pertanto la [9] resta incompleta e non verificata.

Oppure può accadere che si verifichi la situazione grafica di cui si discute in seguito con riferimento alla fig. 35 ed alla fig.36.

In questo caso la retta $r \in \alpha$ in quanto si verificano le specifiche condizioni [7] ed [8] essendo $T_{1r} \in t_{1\alpha}$ e $T_{2r} \in t_{2\alpha}$, ma il punto $P \notin r$ in quanto pur verificando la [2] per $P' \in r'$ non risponde alla [3] perchè $P'' \notin r''$.

In questo caso, quindi, il legame tra il punto P ed il piano α è incompleto tanto da poter affermare che $P \notin \alpha$ perché accade che $P \notin r \in \alpha$.

In questa posizione, infatti, si verifica solamente l'appartenenza tra due dei tre elementi e quindi siamo in presenza di un legame incompleto che non verifica il concetto teorico della [9] espresso all'inizio della trattazione di questo argomento.

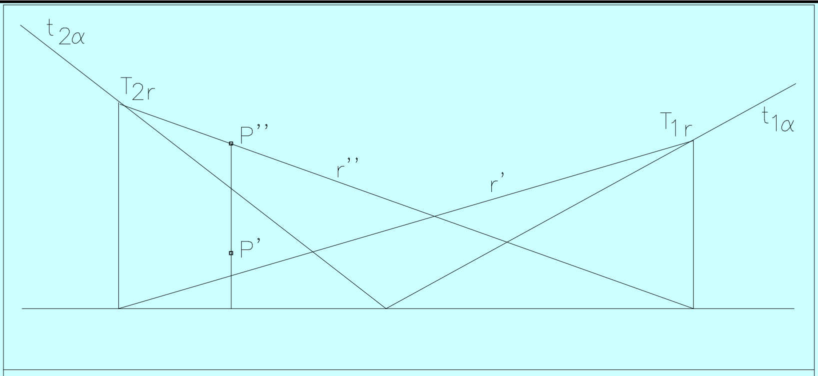


Fig.38–II Diedro–Punto P che non appartiene al piano α

E' solo il caso di accennare che le considerazioni sopra esposte valgono anche nel caso in cui fosse P'∉ r' e P'' ∈ r'', come graficizzato nella fig. 37 e nella fig. 38.

In questo caso resterebbe, comunque, non dimostrato il legame di tutti e tre gli elementi geometrici espressi dalla [9] e dalla [10] necessari per la verifica e la costruzione grafica delle leggi di appartenenza tra un punto P ed un piano α.

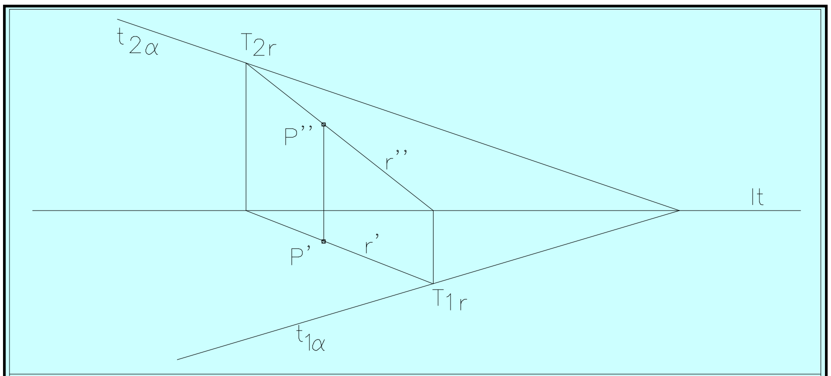


Fig.39–I Diedro–Punto P appartenente al piano α

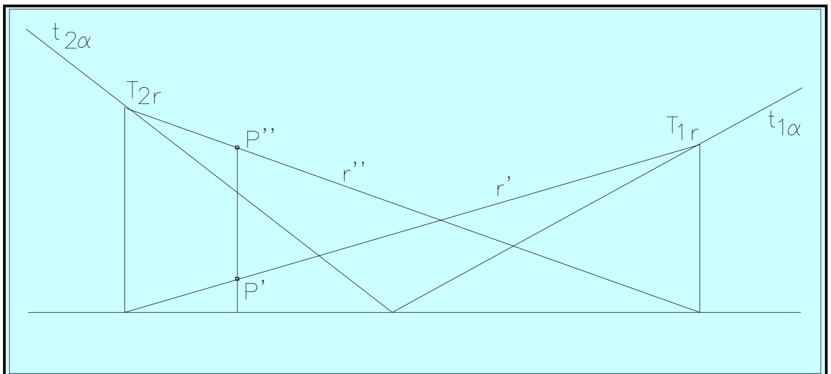


Fig.40–II Diedro–Punto P appartenente al piano α

Infine, può verificarsi che i tre elementi geometrici si articolino graficamente come nelle figure di seguito (Fig. 39, Fig. 40).

In questo caso accade che P∈ r ed anche che r∈ α in quanto le coppie degli elementi menzionati, verificano singolarmente le rispettive specifiche leggi di appartenenza e la retta r funge da elemento geometrico di legame tra il punto P ed il piano α, in quanto mentre sulle sue proiezioni r' ed r'' si trovano le rispettive proiezioni P' e P'' del punto, le sue tracce $T_{1r}$ e $T_{2r}$ stanno sulle tracce del piano $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ verificando completamente la [9].

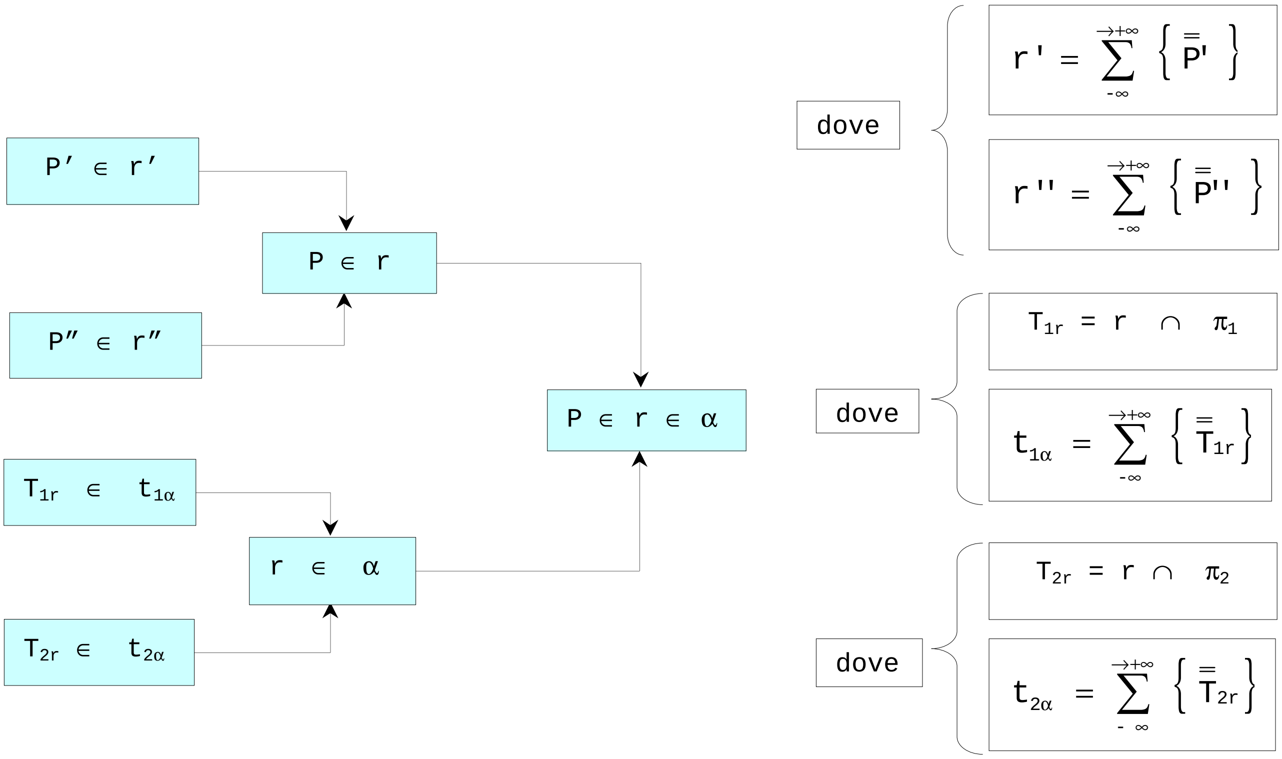
L'espressione sintetica viene espressa come di seguito.

$$\boxed{P \in r \in \alpha \Rightarrow P \in \alpha}$$

Per quanto sopra possiamo dedurre ed enunciare la seguente legge di appartenenza tra punto e piano.

**Se un punto appartiene ad una retta di un piano allora, e solo allora, si può asserire che il punto appartiene al piano.**

Questo enunciato può essere sintetizzato, sia nella formalizzazione insiemistica che descrittiva, con l'uso della simbologia specifica come di seguito.

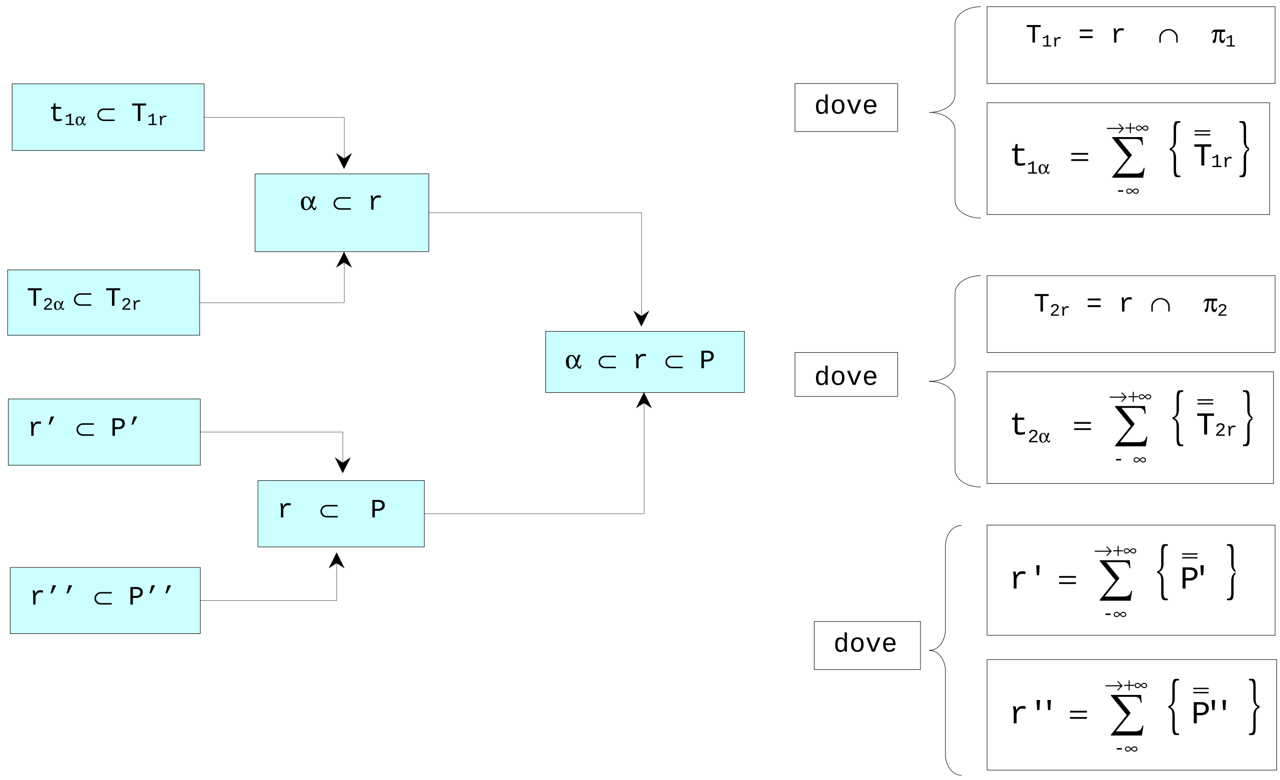



La reciproca legge della contenenza o inclusione di un punto in un piano può essere espressa, con l'utilizzo della stessa nomenclatura e della stessa simbologia, mediante la formalizzazione seguente.

Inoltre, generalizzando, la legge stessa può essere espressa mediante la seguente enunciazione.

**Se un piano contiene una retta che a sua volta contiene un punto allora, e solo allora, il piano contiene il punto.**

Questo enunciato può sintetizzarsi, sia nella formalizzazione insiemistica che descrittiva e con l'uso della simbologia specifica come di seguito.




Tutto quanto sopra è inerente l’aspetto esplicativo e deduttivo della legge oggetto della trattazione.

## 02.03.02. PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA

Se la condizione deve essere imposta, dati gli elementi geometrici è necessario sviluppare una serie di operazioni, tali che si possa verificare, in fase esplicativa, quanto si è discusso sopra ed in particolare si verifichino le definizioni descrittive [9] e [10].

Per questo, dato un punto, se si vuole che esso appartenga ad un piano è necessario che esso sia un punto del piano punteggiato espresso dalla [9] e dalla [10].

Se il dato iniziale è un piano e si vuole che esso contenga un punto è necessario imporre che il punto sia un punto del piano punteggiato espresso dalla [9] e dalla [10].

Poiché per un punto passano infiniti piani (stella di piani) infinite saranno le possibilità di legare gli elementi punto e piano.

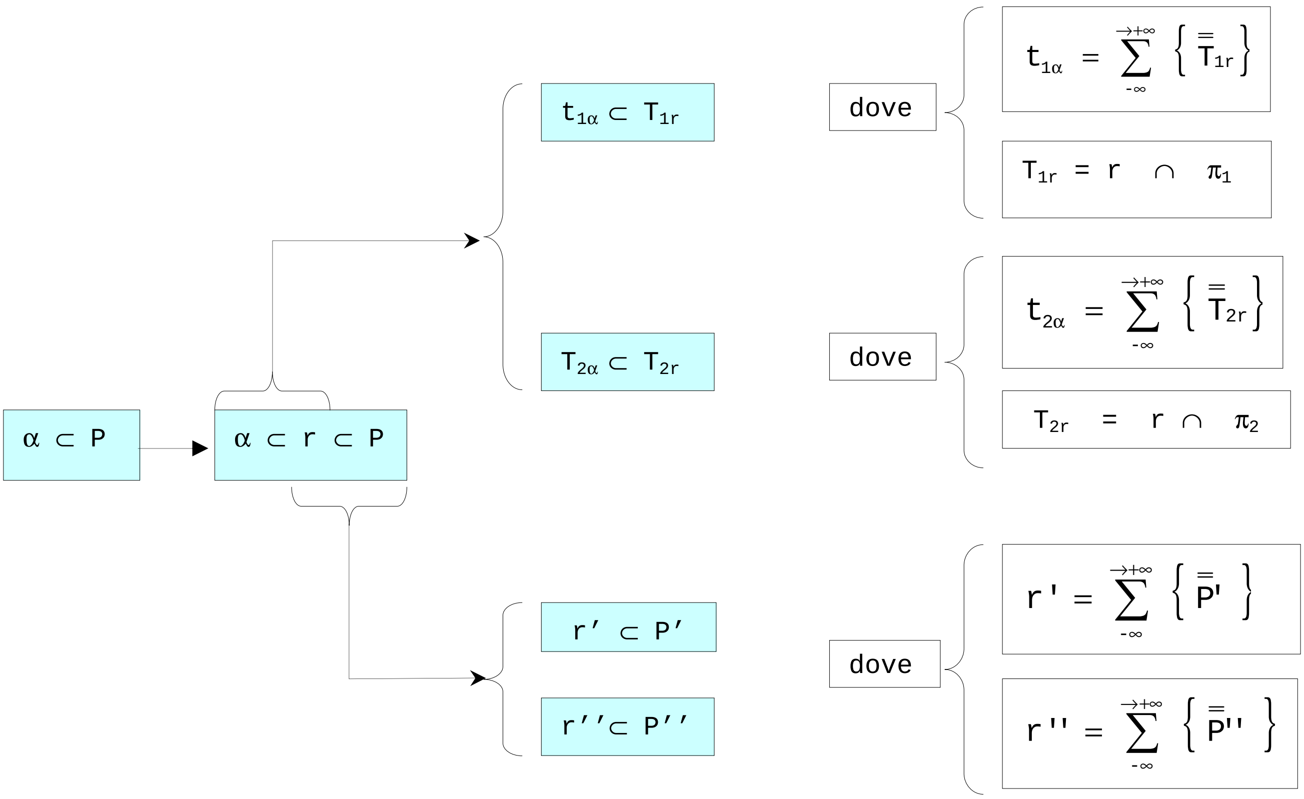
La formalizzazione applicativa della condizione oggetto di studio, allora, può essere espressa come di seguito.

$$P \in \alpha \longrightarrow P \in r \in \alpha$$

$$\begin{cases} P' \in r' \\ P'' \in r'' \end{cases} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} r' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{P'} \right\} \\ r'' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{P''} \right\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{1r} \in t_{1\alpha} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} T_{1r} = r \cap \pi_1 \\ t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{1r} \right\} \end{cases} \\ T_{2r} \in t_{2\alpha} \quad \text{dove} \quad \begin{cases} T_{2r} = r \cap \pi_2 \\ t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{T}_{2r} \right\} \end{cases} \end{cases}$$

La reciproca legge impositiva della condizione di contenenza o inclusione può essere espressa dalla formalizzazione seguente.




Queste due formalizzazioni applicative o impositive possono essere enunciate come di seguito.

Per quanto attiene la condizione di appartenenza si può esprimere la seguente definizione.

**Un punto appartiene ad un piano se, e solo se, il punto appartiene ad una retta del piano.**

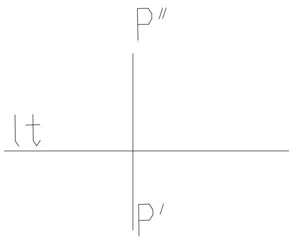
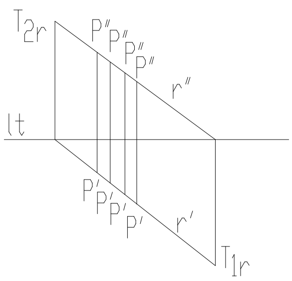
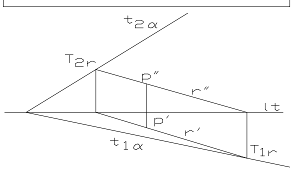
$$(P \in \alpha) \longrightarrow (P \in r \in \alpha)$$

Mentre, reciprocamente, per quanto attiene la legge della contenenza o inclusione si può esprimere la seguente definizione.

**Un piano contiene un punto se, e solo se, il piano contiene una retta che contiene il punto.**

$$(\alpha \subset P) \longrightarrow (\alpha \subset r \subset P)$$

## 02.02.03. QUADRO SINTETICO DELLA CONDIZIONE DI APPARTENENZA O CONTENENZA TRA PUNTO E PIANO

| CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI | | | | | | APPARTENENZA TRA PUNTO E PIANO | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Elemento geometrico | Didascalia elemento geometrico | Didascalia elemento rappresentativo | Nomenclatura elemento rappresentativo | Definizione geometrica elemento rappresentativo | Definizione fisica elemento rappresentativo | Definizione grafica e descrittiva degli elementi geometrici | Espressione insiemistica delle leggi della appartenenza o dell'inclusione |
| Punto | P | P' | $1^a$ immagine o $1^a$ proiezione | Punto | Virtuale |  | **APPARTENENZA**<br>$P \in \alpha$<br>$P \in r \in \alpha$<br>$T_{1r} \in t_{1\alpha}$ $T_{2r} \in t_{2\alpha}$<br>$P' \in r'$ $P'' \in r''$ |
| | | P'' | $2^a$ immagine o $2^a$ proiezione | Punto | Virtuale | | |
| Retta | r | $T_{1r}$ | $1^a$ traccia o traccia 1 | Punto | Reale | $r'' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{P''}} \right\} \mid \overline{\overline{P''}} \in r''$ | |
| | | $T_{2r}$ | $2^a$ traccia o traccia 2 | Punto | Reale |  | |
| | | r' | $1^a$ immagine o $1^a$ proiezione | Retta | Virtuale | | **CONTENENZA**<br>**O**<br>**INCLUSIONE**<br>$\alpha \subset P$<br>$\alpha \subset r \subset P$<br>$r' \subset P'$ $r'' \subset P''$<br>$t_{1\alpha} \subset T_{1r}$ $t_{2\alpha} \subset T_{2r}$ |
| | | r'' | $2^a$ immagine o $2^a$ proiezione | Retta | Virtuale | $r' = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{P'}} \right\} \mid \overline{\overline{P'}} \in r'$ | |
| Piano | π | $t_{1\pi}$ | $1^a$ traccia o traccia 1 | Retta | Reale | $t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{2r}}} \right\}$<br><br>$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\to +\infty} \left\{ \overline{\overline{T_{1r}}} \right\}$ | |
| | | $t_{2\pi}$ | $2^a$ traccia o traccia 2 | Retta | Reale | | |

## 02.03.04. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE NEI QUATTRO DIEDRI

Seguono alcune esemplificazioni grafiche delle condizioni di appartenenza e/o contenenza nei diversi diedri tra punti e piani di diversa tipologia geometrica e collocazione grafica nello spazio (Fig.41, Fig.42, Fig.43, Fig.44).

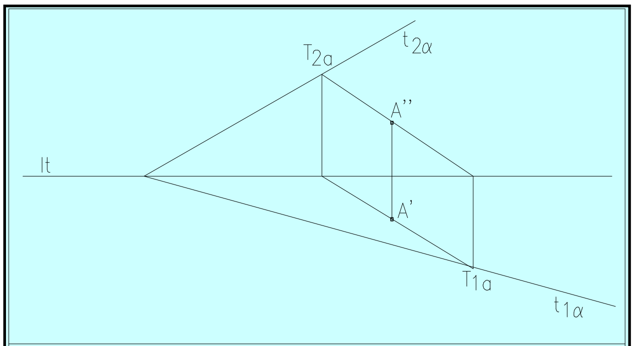


Fig.41–I Diedro–Punto A appartenente al piano $\alpha$

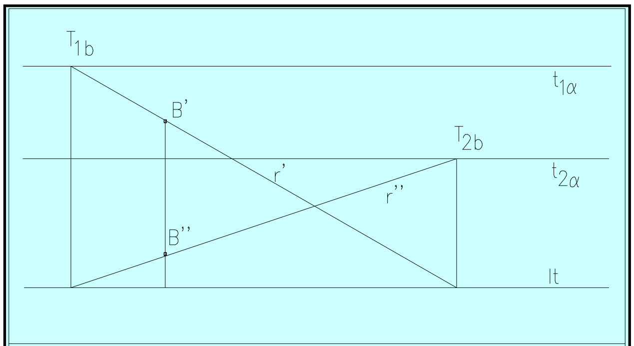


Fig.42–II Diedro–Punto B appartenente al piano $\alpha$

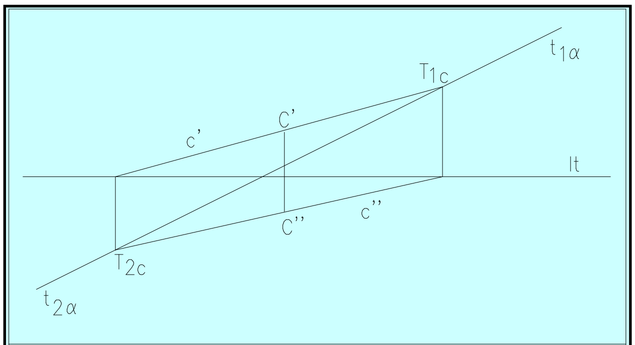


Fig.43–IIIDiedro–Punto C appartenente al piano $\alpha$

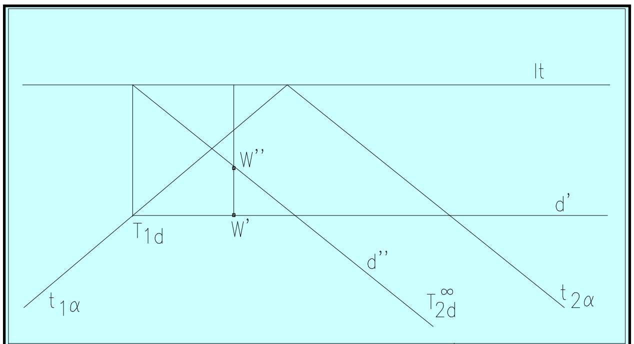


Fig.44–IVDiedro–Punto W appartenente al piano $\alpha$

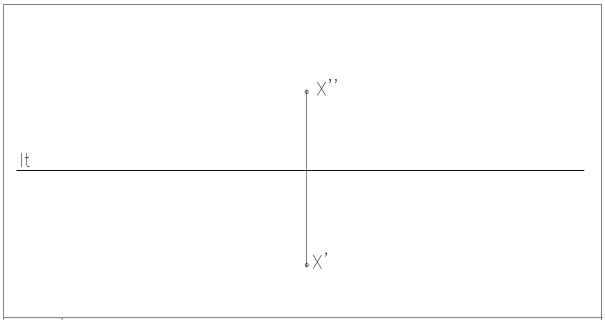
Spazio a disposizione per esempi grafici

Spazio a disposizione per esempi grafici

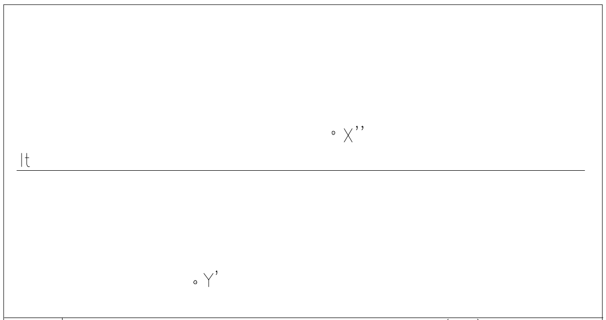
Spazio a disposizione per esempi grafici

Spazio a disposizione per esempi grafici

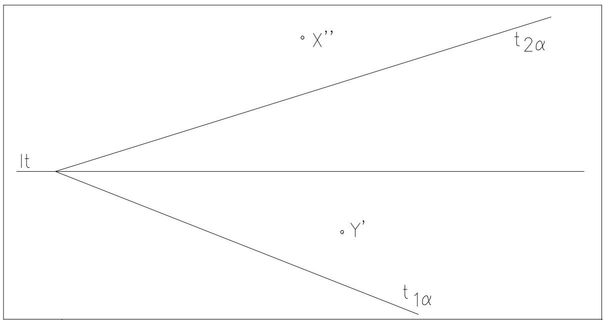
## 02.03.05. ESERCITAZIONI GRAFICHE SULLA CONDIZIONE DI APPARTENENZA E CONTENENZA TRA PUNTO E PIANO



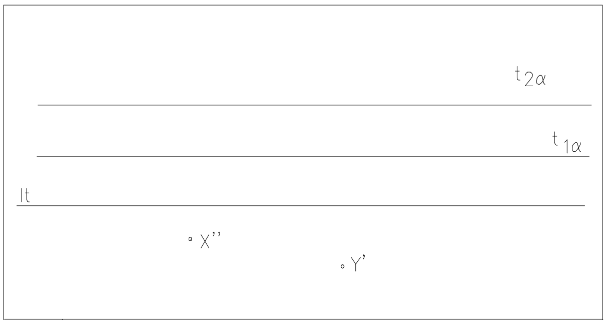

Es.17 Definire e rappresentare il piano $\alpha \subset X$



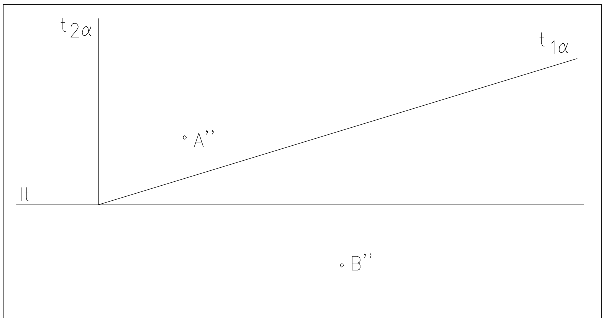

Es.18 Definire e rappresentare il piano $\alpha \subset r \subset (X,Y)$



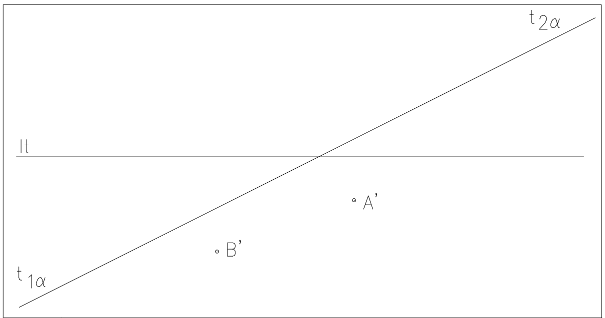

Es.19 Definire e rappresentare $X \in \alpha$ ; $Y \in \alpha$



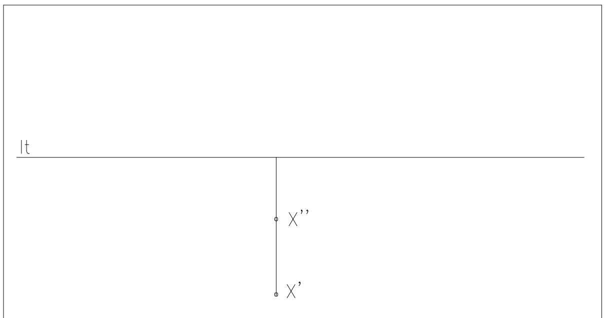

Es.20 Definire e rappresentare $X \in \alpha$ ; $Y \in \alpha$



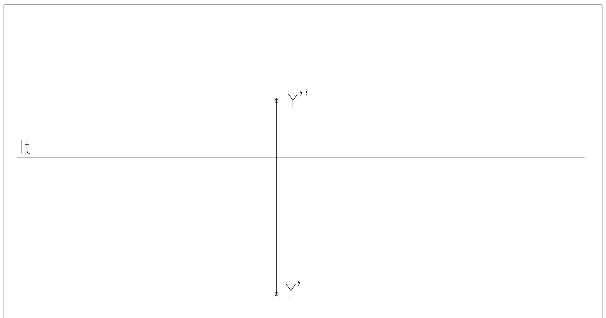

Es.21 Definire e rappresentare $A \in \alpha$ ; $B \in \alpha$




Es.22 Definire e rappresentare $A \in \alpha$ ; $B \in \alpha$




Es.23 Definire e rappresentare due rette $(a,b) \subset X \in \alpha$




Es.24 Definire e rappresentare due rette $(a,b) \subset Y \in \alpha$

**02.03.06. TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE SOTTO FORMA DI ELABORATI GRAFICI**

1. Dato il punto A(A'=3; A''=3) definire e rappresentare un piano $\alpha \subset A$.

2. Dato il punto B(B'=-4; B''= 4) definire e rappresentare una stella di tre piani tali che $(\alpha, \beta, \gamma) \subset B$.

3. Dati i punti A(A'=1; A''=2); B(B'=2; B''=4) C(C'=3; C''=5) definire e rappresentare il piano $\alpha \subset (A,B,C)$.

4. Dati i punti X(x'=1; X''=5); Y(y'=-1; Y''=5); Z(Z'=-3; Z''=-4) definire e rappresentare il piano $\beta \subset (X,Y,Z)$.

5. Dato un piano $\alpha$ ($\angle\pi_1^+$; $\angle\pi_2^+$), definire e rappresentare $(A,B) \in \alpha$.

6. Dato un piano $\alpha$ ($\angle\pi_1^-$; $\angle\pi_2^+$; $/\!/$ lt), definire e rappresentare un segmento $\overline{AB} \in \alpha$.

7. Dato il piano $\beta$($\angle\pi_1^-$; $\angle\pi_2^+$) definire e rappresentare il segmento $\overline{XY} \in \beta$.

8. Dato il piano $\beta$($\perp\pi_1^+$; $\angle\pi_2^+$), definire e rappresentare due punti $(A,B) \in \beta$ .

9. Definire e rappresentare un punto A∈W ID tale che sia $A \in \alpha$ .

10. Definire e rappresentare un punto B∈W IVD tale che sia $B \in \beta$.

11. Definire e rappresentare un piano generico nel IIID contenente due punti distinti, estremi di un segmento $\overline{EF}$ appartenente al piano stesso.

12. Definire e rappresentare una stella di tre piani avente come sostegno un punto X∈W ID.