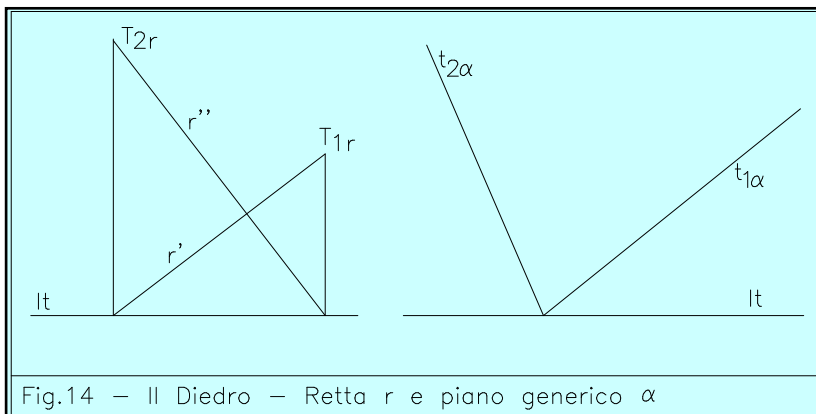
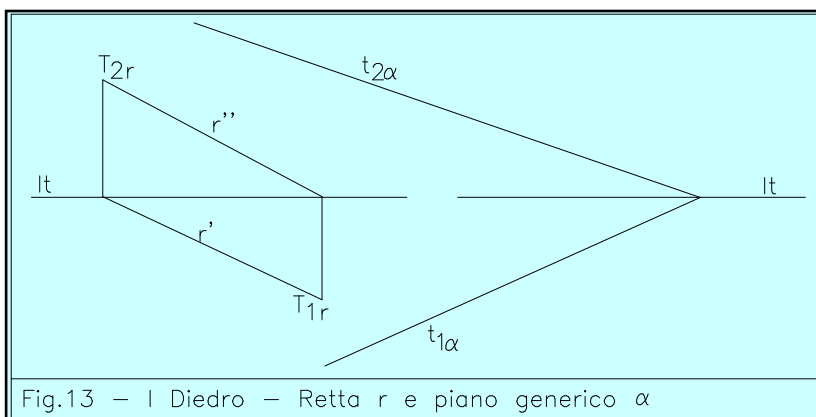


02.02. APPARTENENZA E/O CONTENENZA TRA RETTA E PIANO

02.02.01.INDAGINE ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

Prendiamo, ora, in considerazione gli elementi geometrici retta e piano definendone le relative leggi di appartenenza e/o contenenza, sintetizzate dall'espressione seguente:

$$r \in \alpha \Leftrightarrow \alpha \subset r$$



I due elementi geometrici, riguardati singolarmente, li rappresentiamo come di seguito (Fig.13, Fig.14).

Queste due rappresentazioni hanno in comune un solo elemento: la lt - si ricorda che la lt è costituita dal luogo geometrico⁽¹⁰⁾ dei punti uniti⁽¹¹⁾ - per cui è possibile immaginare di traslare la rappresentazione di r sulla rappresentazione di α , e viceversa, facendo in modo che la lt della retta r coincida, sempre, con la lt del piano α .

Poiché dobbiamo stabilire, con l'operazione di cui sopra, le leggi geometrico-rappresentative tra elementi diversi, è necessario, anzitutto, esaminare e valutare le caratteristiche geometriche e fisiche degli elementi rappresentativi da prendere in esame, sapendo che gli stessi, per essere confrontabili devono caratterizzarsi della stessa natura fisica.

In questo caso prendiamo in considerazione elementi geometrici fisicamente uguali, cioè le tracce della retta T_{1r} e T_{2r} che sono punti fisicamente reali, e le tracce del piano $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ che sono rette reali.

Perché si possa asserire che $r \in \alpha$ e ricordando che il piano può essere, per sua natura, "rigato"⁽¹²⁾ (costituito cioè da una retta che si sposta

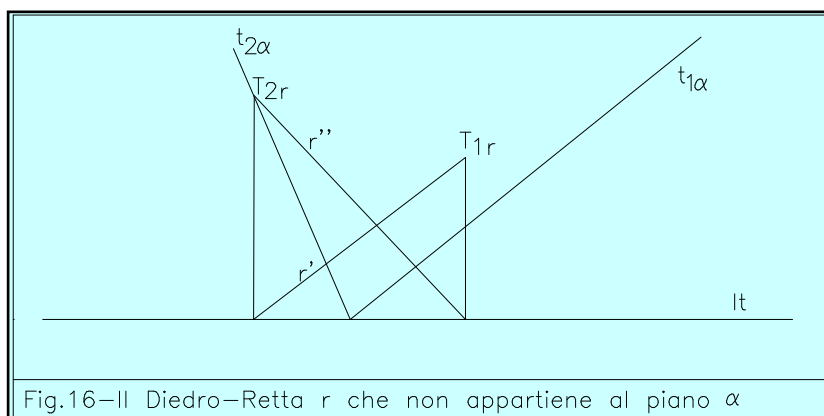
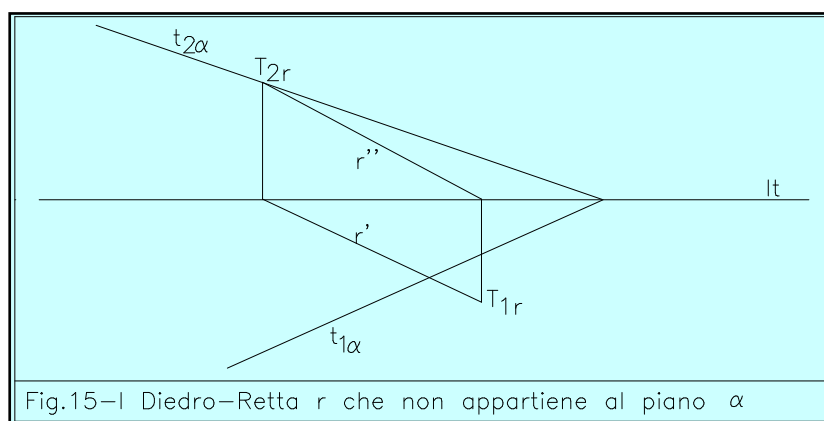
parallelamente a se stessa secondo una direzione prefissata), e contemporaneamente “punteggiato”⁽¹³⁾ (la retta che si muove è, a sua volta, determinata da un punto in moto orientato), possiamo sintetizzare il concetto con la seguente formula.

$$\forall \bar{P} \in W \Rightarrow \exists ! r = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{P} \} | \bar{P} \in r \Rightarrow \forall \bar{r} \in W \Rightarrow \exists ! \pi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{r} \} | \bar{r} \in \pi \quad [4]$$

Ricordando, inoltre, che le tracce t del piano sono rette reali e le tracce T della retta sono punti reali (vedi quadro sinottico iniziale della Tabella -A-), allora si può stabilire che:

$$\alpha = \begin{cases} t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ T_{1r} \} & [5] \\ t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ T_{2r} \} & [6] \end{cases}$$

dove la retta r è quella retta che muovendosi parallelamente a se stessa genera il piano α .



Perciò è necessario verificare che le tracce della retta r : T_{1r} e T_{2r} appartengano agli insiemi delle sommatorie [5] e [6], quindi siano punti che determinano le tracce del piano α ($t_{1\alpha}$; $t_{2\alpha}$).

Allora, traslando e sovrapponendo le due rappresentazioni di figg.13 e 14, può accadere che si presenti la graficizzazione della fig.15 e della fig.16.

In questo caso il rapporto descrittivo tra

gli elementi geometrici si caratterizza come di seguito:

$t_{1\alpha} \not\subset T_{1r}$ mentre $t_{2\alpha} \subset T_{2r}$,

per cui accade che:

$$\alpha = \begin{cases} t_{1\alpha} \neq \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{1r} \} \\ t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{2r} \} \end{cases}$$

quindi, mentre T_{2r} sta su $t_{2\alpha}$, verificando la [6], viceversa, T_{1r} non sta su $t_{1\alpha}$; quindi non verifica la [5]. Pertanto, mentre T_{2r} è un punto dell'insieme sommatoria [6], non possiamo dire la stessa cosa per T_{1r} che non risulta essere un punto della sommatoria [5]. Da ciò si può dedurre, facilmente, che $r \notin \alpha$ e quindi la retta r non è una retta del piano α perché non gli appartiene e, viceversa, il piano non contiene la retta r , cioè, in forma sintetica $\alpha \not\subset r$.

La formalizzazione sintetica si esplicita come di seguito.

$$r \notin \alpha \Leftrightarrow \alpha \not\subset r$$

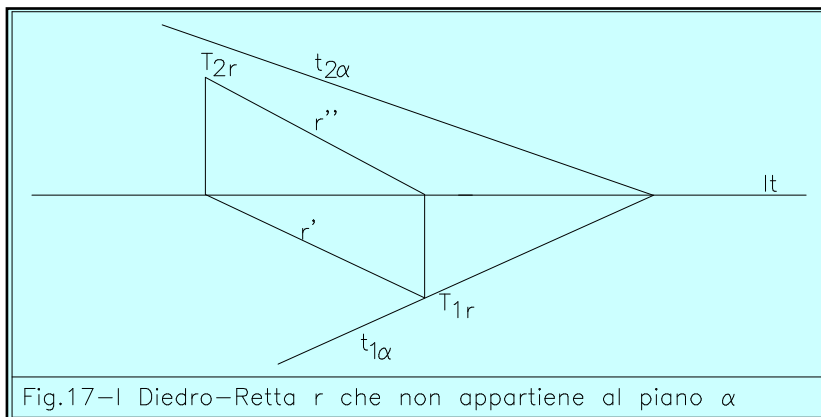


Fig.17—I Diedro—Retta r che non appartiene al piano α

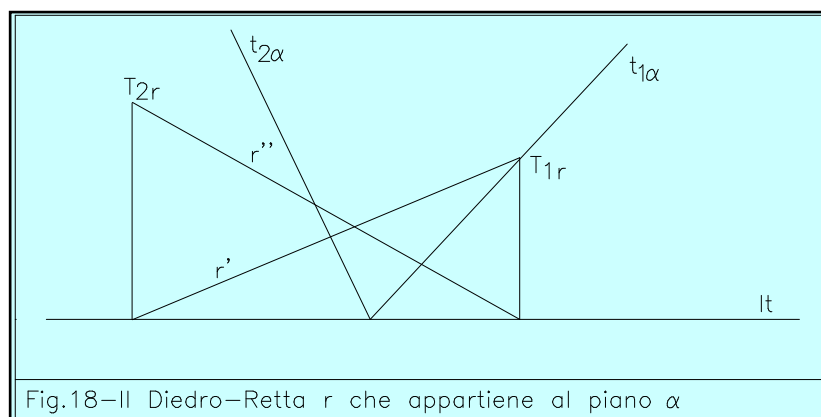


Fig.18—II Diedro—Retta r che appartiene al piano α

Continuando a traslare i due elementi, e fermo restando la coincidenza tra la lt della retta r e la lt del piano, può accadere che si presenti la seguente situazione grafica (Fig.17, Fig. 18).

In questa ipotesi grafica si presenta la seguente descrizione descrittiva.

$$\alpha = \begin{cases} t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{1r} \} \\ t_{2\alpha} \neq \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{2r} \} \end{cases}$$

EsPLICITANDO si ha che: T_{1r} sta su $t_{1\alpha}$ e quindi reciprocamente $t_{1\alpha} \subset T_{1r}$ verificando la [5], ma T_{2r} non sta su $t_{2\alpha}$ e quindi non verifica la [6], per cui si ha che $t_{2\alpha} \not\subset T_{2r}$.

Pertanto, mentre T_{1r} è un punto della sommatoria [5] su π_1 , non può dirsi la stessa cosa per il punto T_{2r} che non risulta essere un punto della sommatoria [6] su π_2 .

Da quanto sopra possiamo, facilmente, dedurre che $r \notin \alpha$ cioè che la retta r non appartiene al piano dato α .

L'espressione sintetica si esplicita come di seguito.

$$r \notin \alpha \Leftrightarrow \alpha \not\subset r$$

Tra le infinite reciproche posizioni di α e di r può accadere che si presentino, anche, graficizzazioni simili a quelle delle seguenti fig. 19 e fig. 20.

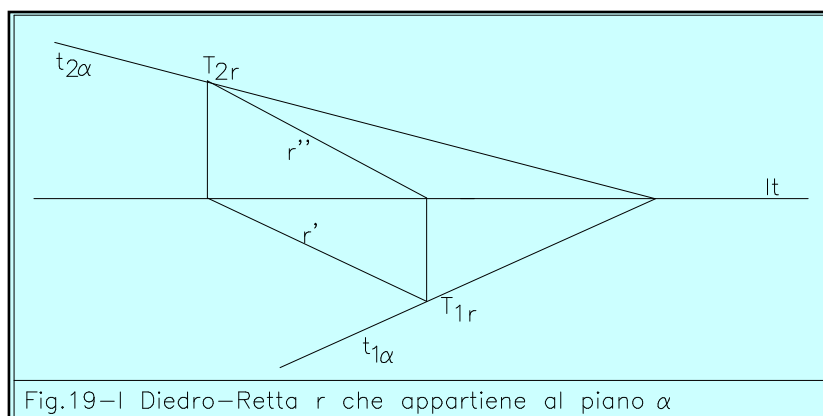


Fig.19—I Diedro—Retta r che appartiene al piano α

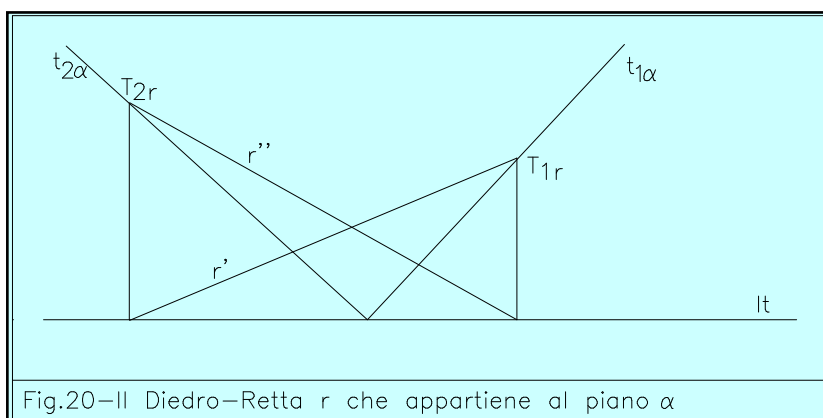


Fig.20—II Diedro—Retta r che appartiene al piano α

In questo caso si riscontra che la traccia T_{1r} della retta sta sulla traccia $t_{1\alpha}$ del piano quindi, reciprocamente $t_{1\alpha} \subset T_{1r}$ così come T_{2r} sta su $t_{2\alpha}$ e quindi, reciprocamente $t_{2\alpha} \subset T_{2r}$.

Allora accade che T_{1r} è un punto dell'insieme della sommatoria [5] che genera $t_{1\alpha}$ come T_{2r} è un punto dell'insieme della

sommatoria [6] che genera $t_{2\alpha}$.

Pertanto le due tracce della retta r , T_{1r} e T_{2r} - che sono punti reali- appartengono rispettivamente alle due rette reali $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ che rappresentano le tracce del piano α .

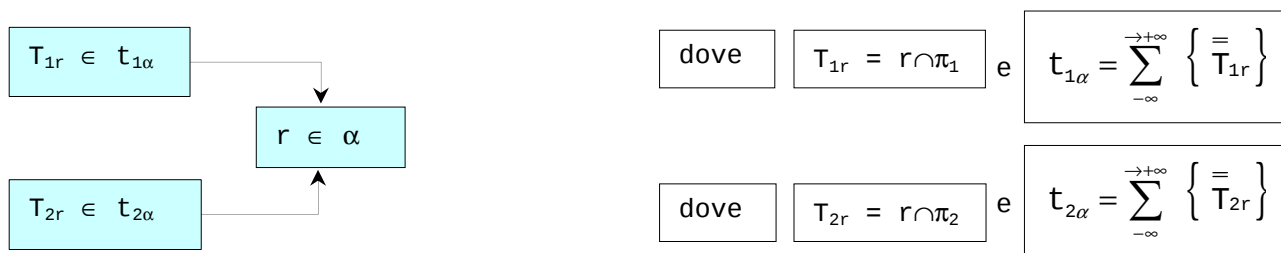
L'espressione sintetica si esplicita come di seguito.

$$r \in \alpha \Leftrightarrow \alpha \subset r$$

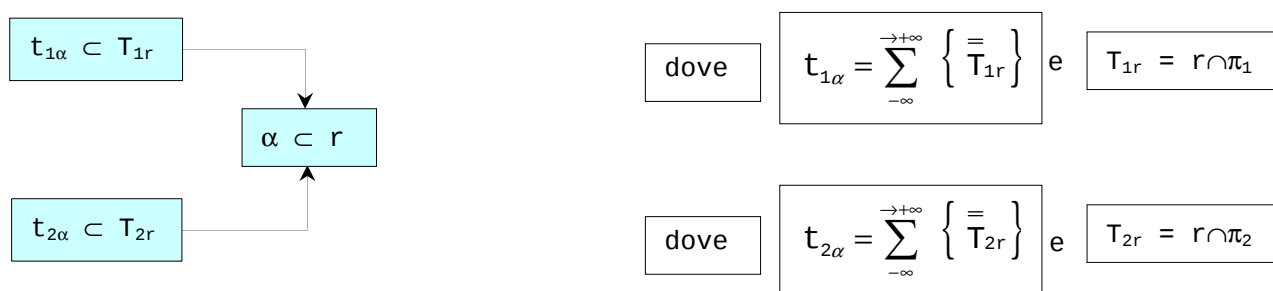
Sintetizzando, poiché le due tracce del piano contengono rispettivamente le corrispondenti due tracce della retta, possiamo asserire la seguente legge esplicativa di appartenenza tra retta e piano.

Se le tracce di una retta appartengono alle rispettive omonime tracce di un piano allora, e solo allora, la retta appartiene al piano.

Quindi possiamo sintetizzare la seguente legge descrittiva di appartenenza di una retta ad un piano, che, esplicitandola negli elementi geometrico-descrittivi, assume la seguente forma.



Il criterio reciproco della contenenza o inclusione si esprime, mediante la simbologia specifica, nel modo seguente.



mentre la definizione si enuncia come di seguito.

Se le tracce di un piano contengono le rispettive omonime tracce di una retta allora, e solo allora, il piano conterrà la retta.

02.02.02. PROCEDURA APPLICATIVA O IMPOSITIVA

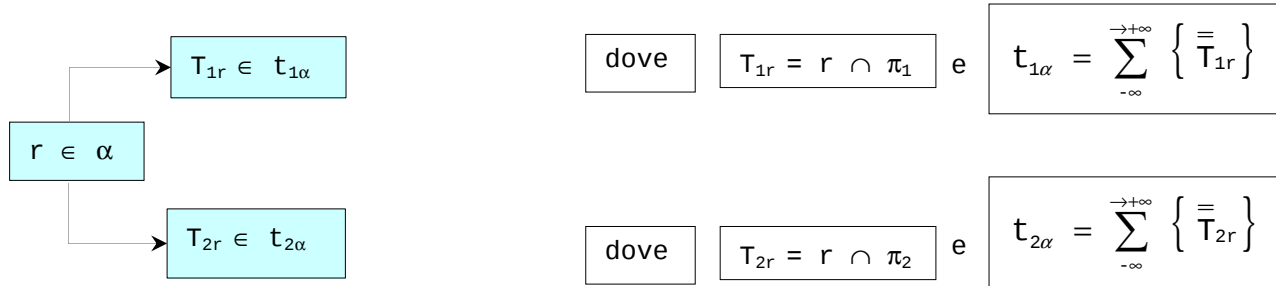
Se la condizione deve essere imposta, durante la fase esecutiva di un elaborato grafico; dati gli elementi geometrici è necessario sviluppare le operazioni in modo tale che si verifichino le graficizzazioni di cui si è discusso sopra.

Per questo, data una retta r rappresentata mediante le sue tracce T_{1r} e T_{2r} ; se si vuole che la retta $r \in \alpha$ dovranno costruirsi le relazioni $T_{1r} \in t_{1\alpha}$ e $T_{2r} \in t_{2\alpha}$ in quanto è necessario imporre che le tracce della retta siano elementi delle espressioni [5] e [6].

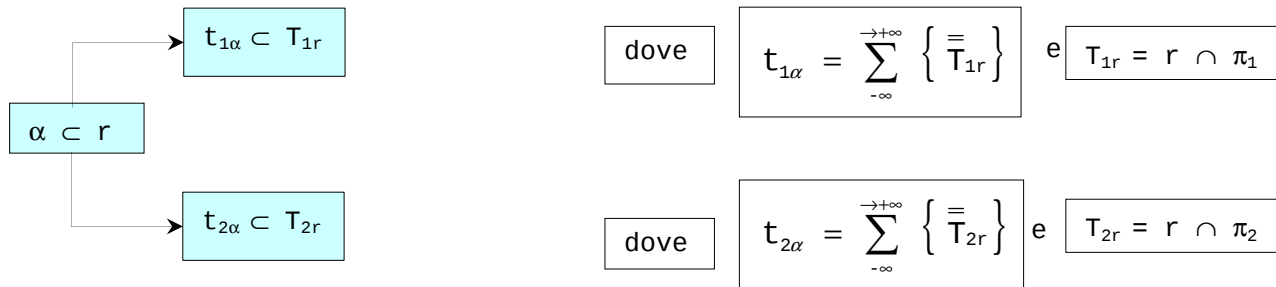
Se il dato iniziale è, invece, un piano rappresentato mediante $t_{1\alpha}$ e $t_{2\alpha}$ e si vuole che esso contenga una retta r , è necessario imporre che le tracce della retta siano elementi delle espressioni [5] e [6].

Poiché per una retta passano infiniti piani, infinite saranno le tracce dei piani passanti per le tracce della retta.

La formalizzazione applicativa o impositiva può essere espressa come di seguito.



Mentre la reciproca legge di contenenza o inclusione può essere espressa dalla formalizzazione che segue.



Queste due formalizzazioni applicative possono essere recitate come di seguito.

Per quanto attiene la condizione di appartenenza si ha la seguente definizione verbale.

Una retta appartiene ad un piano se, e solo se, le tracce della retta appartengono alle omonime tracce del piano.

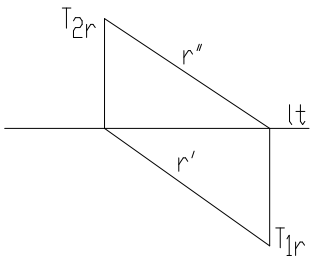
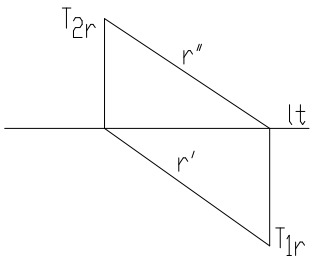
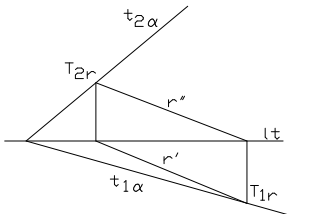
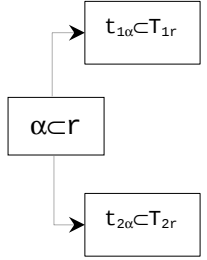
$$r \in \alpha \longrightarrow (T_{1r} \in t_{1\alpha} ; T_{2r} \in t_{2\alpha})$$

Mentre, per la reciproca legge dell'inclusione o contenenza si può enunciare la seguente definizione.

Un piano contiene una retta se, e solo se, le tracce del piano contengono le rispettive omonime tracce della retta.

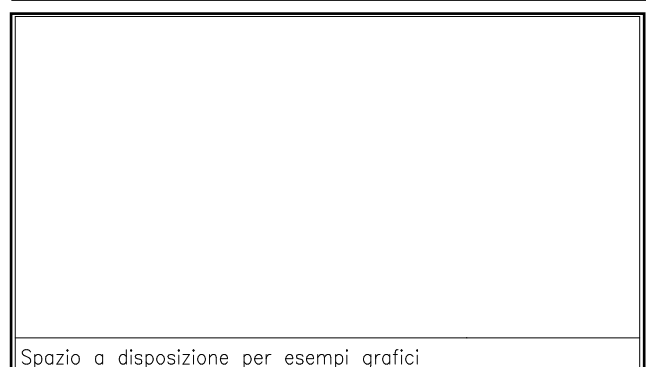
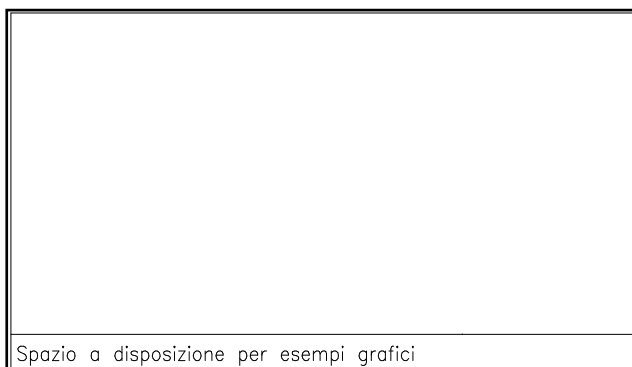
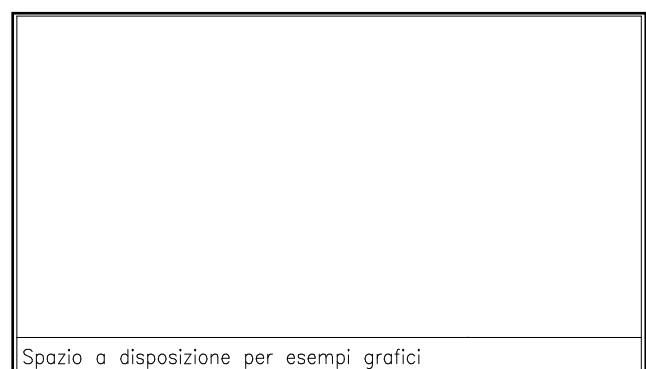
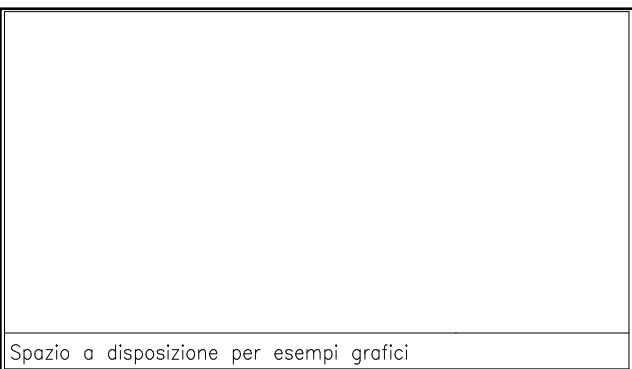
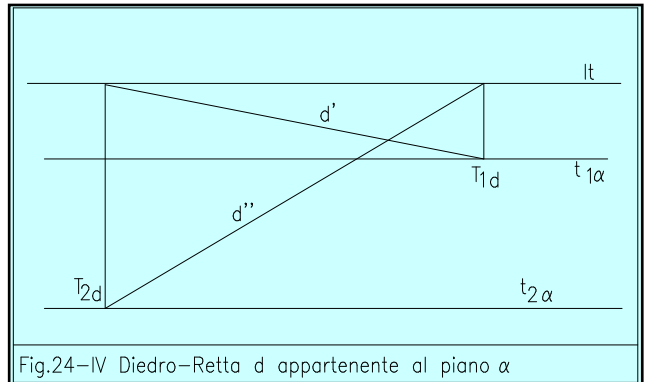
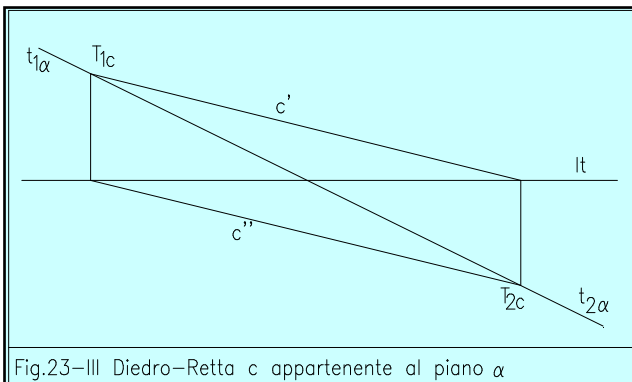
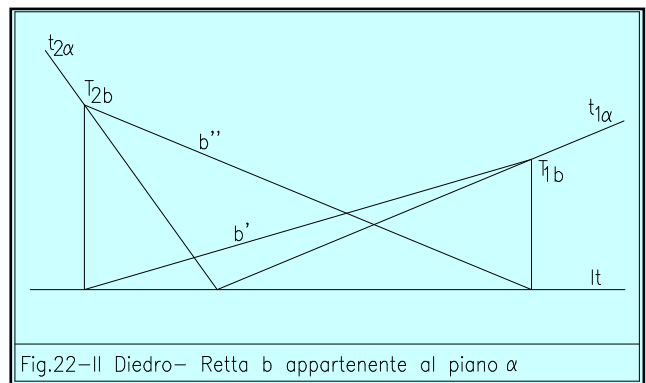
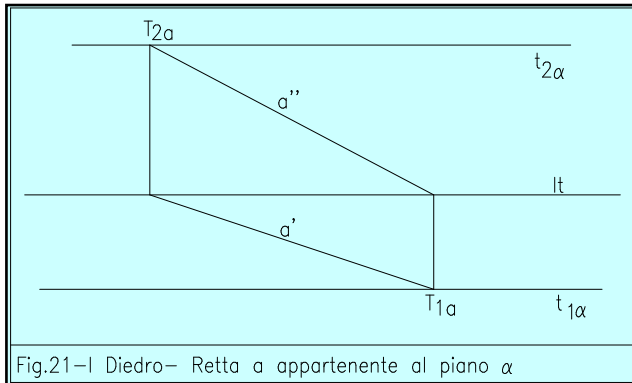
$$\alpha \subset r \longrightarrow (t_{1\alpha} \subset T_{1r} ; t_{2\alpha} \subset T_{2r})$$

02.02.03. QUADRO SINTETICO DELLA CONDIZIONE DI APPARTENENZA O CONTENENZA E INCLUSIONE TRA RETTA E PIANO

CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI						APPARTENENZA TRA RETTA E PIANO	
Elemento geometrico	Didascalia elemento	Didascalia elemento rappresentativo	Nomenclatura elemento rappresentativo	Definizione geometrica elemento rappresentativo	Definizione fisica elemento rappresentativo	Definizioni grafica e descrittiva degli elementi geometrici	Relazione insiemistica sintetica delle leggi della appartenenza o inclusione
Retta	r	T_{1r}	1 ^a traccia o traccia 1	punto	reale	$r'' = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{p}'' \} \bar{p}'' \in r''$	APPARTENENZA  $r \in \alpha$ $T_{1r} \in t_{1\alpha}$ $T_{2r} \in t_{2\alpha}$
		T_{2r}	2 ^a traccia o traccia 2	punto	reale		
		r'	1 ^a immagine o 1 ^a proiezione	retta	virtuale	$r' = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{p}' \} \bar{p}' \in r'$	
		r''	2 ^a immagine o 2 ^a proiezione	retta	virtuale		
Piano	π	$t_{1\pi}$	1 ^a traccia o traccia 1	retta	reale	$t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{2r} \}$ 	CONTENENZA O INCLUSIONE  $\alpha \subset r$ $t_{1\alpha} \subset T_{1r}$ $t_{2\alpha} \subset T_{2r}$
		$t_{2\pi}$	2 ^a traccia o traccia 2	retta	reale	$t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{T}_{1r} \}$	

02.02.04. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE NEI QUATTRO DIEDRI

I disegni che seguono rappresentano alcune esemplificazioni grafiche delle condizioni di appartenenza e/o contenenza nei diversi diedri tra retta e piano, di diversa tipologia geometrica e differente collocazione fisica nello spazio (Fig. 21; Fig. 22; Fig. 23; Fig. 24).



02.02.05. ESERCITAZIONI GRAFICHE SULLA CONDIZIONE DI APPARTENENZA O CONTENUTA
TRA RETTA E PIANO

Es.09

Completare la rappresentazione in modo tale che sia $(s,r) \in \alpha$

Es.10

Completare la rappresentazione in modo tale che sia $(a,b) \in \alpha$

Es.11

Definire e rappresentare un piano contenente r

Es.12

Definire e rappresentare un piano contenente r

Es.13

Definire e rappresentare un piano contenente r

Es.14

Definire e rappresentare un piano contenente le rette a,b

Es.15

Definire e rappresentare $\overline{PQ} \in \alpha$

Es.16

Definire e rappresentare $\overline{AB} \in \alpha$; $\overline{AC} \in \alpha$

02.02.06. TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE SOTTO FORMA DI ELABORATI GRAFICI
--

01. Dati il punto $A(A'=3; A''=3)$ e la traccia $T_{2a}=4$, definire e rappresentare prima la retta $a \subset A$, poi il piano $\beta \subset a$.
02. Dati i punti $X(X'=4; X''=-4)$; $Y(Y'=2; Y''=-2)$, definire e rappresentare il piano $\alpha \subset (X, Y)$.
03. Data la retta $a(T_{1a}=-3; T_{2a}=\infty)$, definire e rappresentare un piano $\alpha \subset a$.
04. Data la retta $b(T_{1b}=-4; T_{2b}=4)$, definire e rappresentare un piano $\beta \subset b$.
05. Dato il piano $\alpha(\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^+)$, definire e rappresentare le rette $(a, b) \in \alpha$.
06. Dato il piano $\beta(\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^-)$, definire e rappresentare le rette $(x, y) \in \beta$.
07. Dato il piano $\gamma(\angle \pi_1^+ \angle \pi_2^+ \parallel lt)$, definire e rappresentare le rette $(l, m) \in \gamma$.
08. Dato il piano $\delta(\perp \pi_1^+ \angle \pi_2^+)$, definire e rappresentare le rette $(o, p) \in \delta$.
09. Definire e rappresentare una retta generica nel ID ed un fascio di tre piani che la contengono.
10. Definire e rappresentare una retta di profilo nel IIID ed una coppia di piani che la contengono.
11. Definire e rappresentare un piano generico parallelo alla lt nel ID a cui appartengono due rette incidenti.
12. Definire e rappresentare un piano generico nel IID a cui appartengono un fascio di tre rette.