04.01.01. PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO SVILUPPATO SUL PARALLELISMO TRA RETTE

Sulla base delle considerazioni di cui al punto precedente, si può riesaminare il legame del parallelismo, tra retta e piano, ampliandolo con un concetto di appartenenza.

Quindi si può ridefinire lo stesso criterio riferendolo alla retta data e ad una retta, a questa parallela, ma appartenente al piano. A conclusione delle analisi teoriche e dei raffronti grafici se la retta data è parallela ad una retta che appartiene al piano, allora si può asserire che i due elementi, retta e piano, sono paralleli in quanto si può dimostrare la seguente relazione:

$$\underbrace{s // r}_{\substack{s' // r' \\ s'' // r''}} \wedge \underbrace{r \in \alpha}_{\substack{T_{1r} \in t_{1\alpha} \\ T_{2r} \in t_{2\alpha}}} \rightarrow s // \alpha$$

03.04.01.01. INDAGINE ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

Stabilito quanto sopra, si possono analizzare alcuni casi possibili, come, ad esempio, quelli di seguito riportati.

Dati $r(r';\ r'')$ ed $\alpha(t_{1\alpha};\ t_{2\alpha})$, per verificare se i due elementi geometrici sono in rapporto di parallelismo, cioè se $r // \alpha$, definiamo una retta s che, per costruzione, sia parallela alla retta data.

Quindi sarà $s' // r'$ ed $s'' // r''$, di conseguenza se la retta $s \in \alpha$ sarà anche verificata la seguente appartenenza: $T_{1s} \in t_{1\alpha}$ e $T_{2s} \in t_{2\alpha}$. Stante ciò possiamo asserire, allora, che $r // \alpha$ perché si accerta la presenza del doppio legame (parallelismo ed appartenenza) tra i due elementi tanto che risulta essere $r // s \in \alpha$.

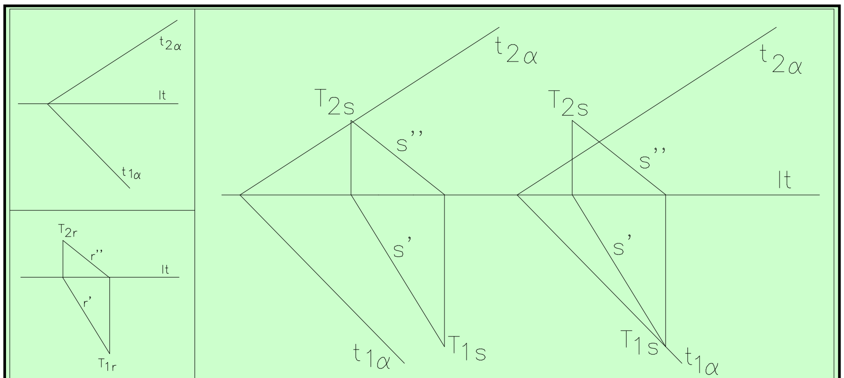


Fig.20–Parallelismo tra retta e piano basato sul parallelismo tra retta data e retta del piano

Nel caso specifico come quello elaborato nella figura 20 si verifica che: fermo restando il parallelismo tra le rette $r // s$, in un primo caso si ha che $T_{1s} \notin t_{1\alpha}$, nel secondo caso, invece, $T_{2s} \notin t_{2\alpha}$ da cui si evince che $s \notin \alpha$ e quindi poiché s non è una retta del piano α, resta dimostrato che:

$\boxed{r//s \notin \alpha} \rightarrow \boxed{r \ // \ s \ \angle \ \alpha} \rightarrow \boxed{r \ \angle \ \alpha}$

Oltre al caso già esaminato, può accadere che dall'elaborazione grafica scaturisca una rappresentazione degli elementi geometrici, tra loro in rapporto descrittivo, come quello evidenziato dalla seguente figura 21.

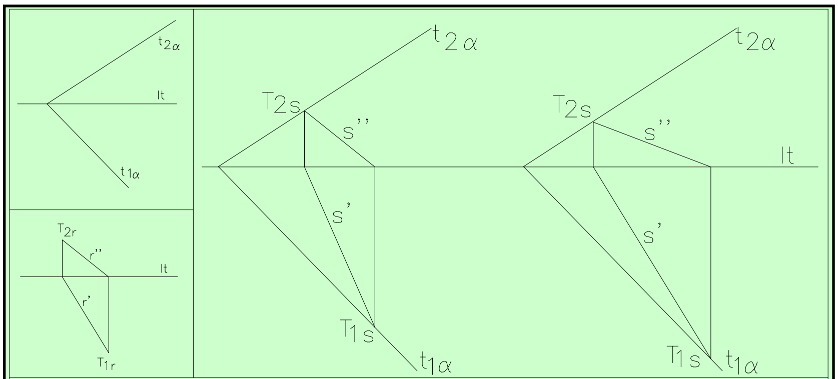


Fig.21–Parallelismo tra retta e piano basato sull'appartenenza

La retta s, in questo caso, si caratterizza come appartenente al piano α in quanto $T_{1s} \in t_{1\alpha}$ e $T_{2s} \in t_{2\alpha}$ ma le proiezioni della stessa s' ed s'' non rispondono alle leggi descrittive relative al parallelismo tra rette in quanto costruendo, come nel primo caso, s''//r'' si verifica che per definire $s \in \alpha$ si determina s'∠r'; mentre nel secondo caso, costruito s'//r' si verifica che per definire $s \in \alpha$ si determina s''∠r''. Pertanto, le due rette, la retta r data e la retta s, costruita appartenente al piano α, si caratterizzano, a seconda del caso, come due rette incidenti o due rette sghembe.

Da quanto sopra ne discende che:

$\boxed{\alpha \subset s}$ ed anche che $\boxed{s \ \angle \ r}$

riunificando ed operando le sostituzioni si ha :

$\boxed{\alpha \ \subset \ s \ \angle \ r} \rightarrow \boxed{\alpha \ \angle \ r}$

$\boxed{r \ \angle \ \alpha}$

e biunivocamente, quindi, anche

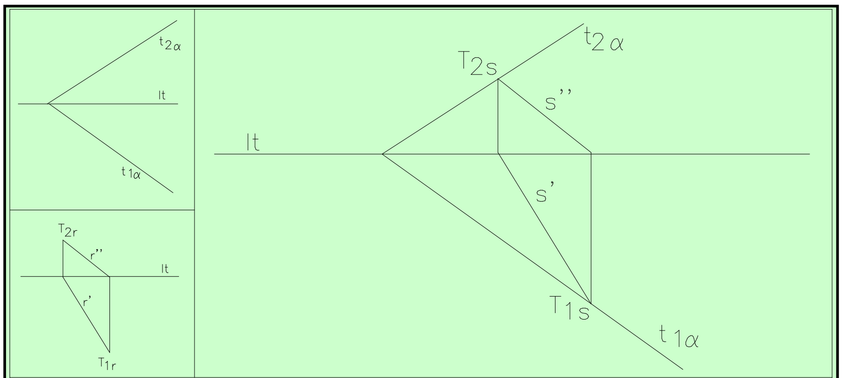
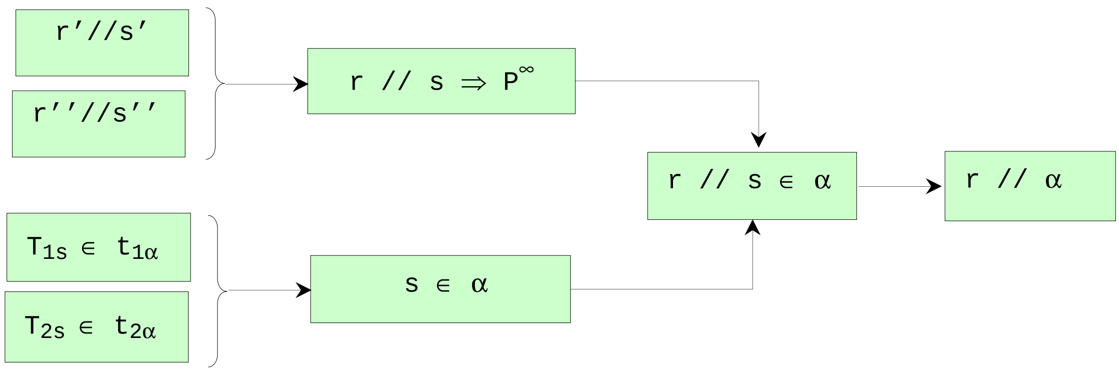


Fig.22–Parallelismo tra retta e piano e verifica completa delle condizioni

Può, inoltre, verificarsi il caso in cui la retta s oltre ad essere appartenete al piano α, per cui sarà $T_{1s} \in t_{1\alpha}$ e $T_{2s} \in t_{2\alpha}$, avrà anche le proiezioni s’ ed s’’ parallele alle rispettive proiezioni r’ ed r’’ della retta data r, come nel disegno affianco (Fig.22).

Schematizzando queste osservazioni si possono sintetizzare nei seguenti passaggi esplicativi.



In questa situazione la retta s oltre che presentarsi appartenente al piano α, si presenta parallela alla retta data r.

Stante l’esistenza di questa doppia condizione geometrica, poiché le proiezioni delle due rette, r data, ed s costruita, hanno in comune un punto improprio P^{∞}, si può asserire che, in questo caso, la retta r è parallela al piano in quanto essendo parallela alla retta s del piano, mantiene con questo il <u>rapporto</u> <u>geometrico</u> <u>definito</u>, <u>continuo</u> e <u>costante</u> detto “<u>rapporto</u> <u>di</u> <u>parallelismo</u>”.

Pertanto possiamo sintetizzare, per questi elementi, la seguente enunciazione geometrico-descrittiva di carattere esplicativo.

Se le proiezioni di una retta data sono parallele alle omonime proiezioni di una retta appartenente al piano, allora possiamo asserire che il piano e la retta reali saranno anch'essi paralleli.

In forma più sintetica, considerando gli elementi reali, possiamo dare la seguente definizione.

Se la retta data e' parallela ad una retta di un piano assegnato, allora, e solo allora la retta e' parallela al piano.

Ampliando la definizione descrittiva con il concetto di punto improprio possiamo dare la seguente definizione.

Una retta è parallela ad un piano se la loro intersezione genera un punto improprio.

04.01.01.02. PROCEDURA IMPOSITIVA O APPLICATIVA

Se la condizione geometrica in discussione deve essere imposta o applicata ad una retta ed un piano; allora è necessario operare, graficamente, in modo tale che si verifichino le relazioni di cui si è discusso al punto precedente. Conseguentemente la definizione impositiva della condizione in discussione può essere espressa in forma verbale come di seguito.

Perché una retta sia parallela ad un piano è necessario che le proiezioni della retta data siano parallele alle omonime proiezioni di una retta appartenente al piano.

Tale definizione si sintetizza nella seguente formalizzazione:

$$\boxed{r//\alpha \Rightarrow r//s \in a}$$

che si esplicita come segue:

$$r // \alpha \rightarrow r // s \in \alpha$$

$$r' // s' \qquad r'' // s'' \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} r' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{P'} \right\}; \quad s' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{Q'} \right\} \\ r'' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{P''} \right\}; \quad s'' = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{Q''} \right\} \end{cases}$$

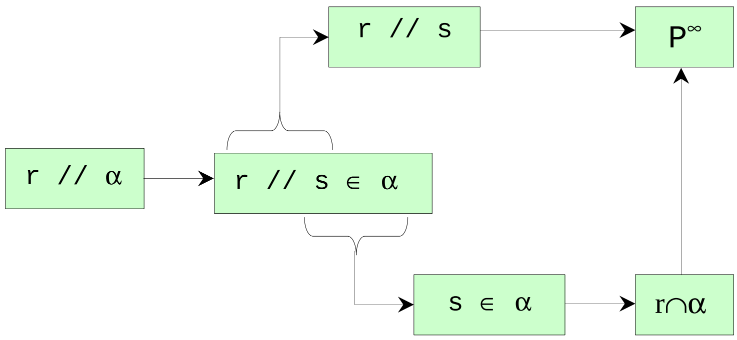
$$T_{1s} \in t_{1\alpha} \qquad T_{2s} \in t_{2\alpha} \qquad \text{dove} \quad \begin{cases} T_{1s} = s \cap \pi_1 \;\; ; \; t_{1\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{T_{1s}} \right\} \\ T_{2s} = s \cap \pi_2 \;\; ; \; t_{2\alpha} = \sum_{-\infty}^{\rightarrow +\infty} \left\{ \overset{=}{T_{2s}} \right\} \end{cases}$$

Inoltre, ampliando l'operazione con l'applicazione del concetto di punto improprio si ha la seguente espressione.

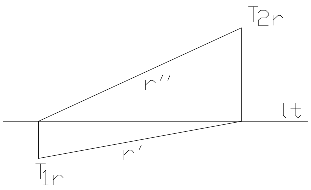
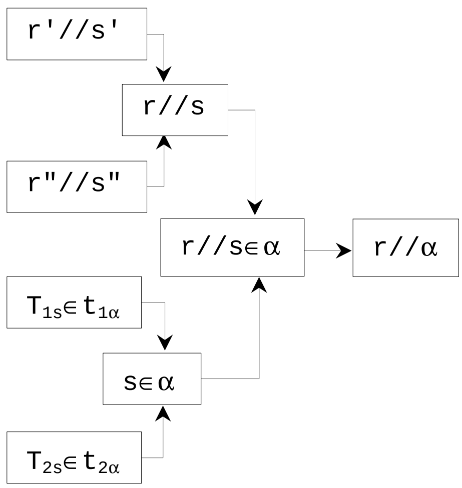
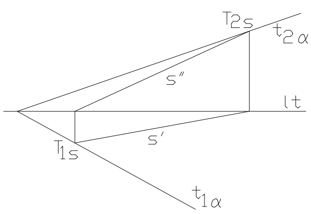
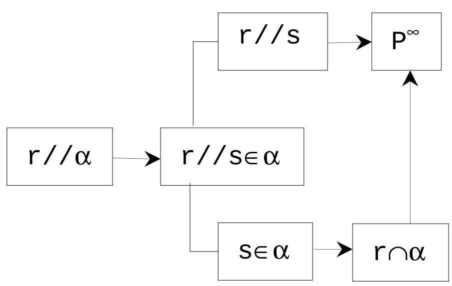
Perché una retta sia parallela ad un piano è necessario che la relativa intersezione generi un punto improprio.

$$\boxed{r \,//\, \alpha \Rightarrow r \cap \alpha \Rightarrow P^{\infty}}$$

Questa definizione geometrica può essere sintetizzata ed espressa con la seguente formalizzazione applicativa insiemistico-descrittiva.



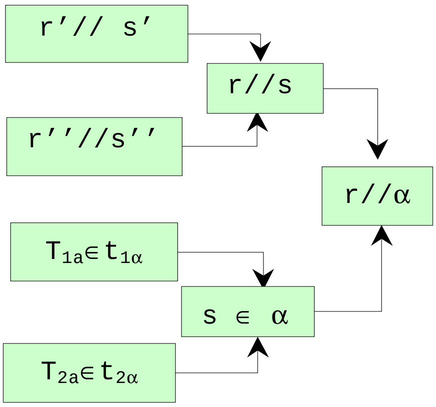
04.01.01.03.QUADRO SINTETICO DELLA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO SVILUPPATO SUL PARALLELISMO TRA RETTE

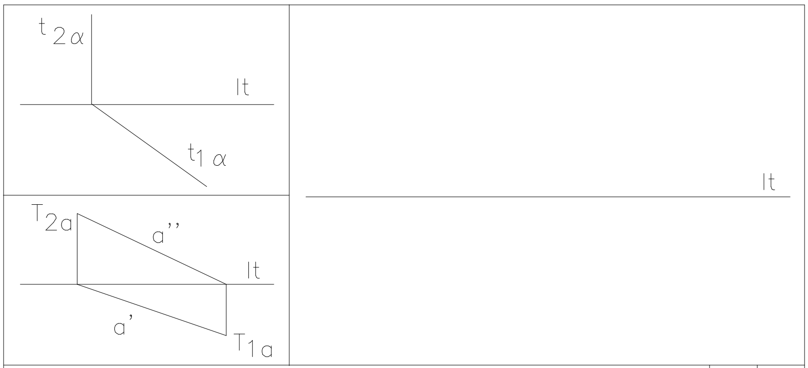
CARATTERISTICHE DEGLI ELEMENTI GEOMETRICI						PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO BASATO SUL PARALLELIMO TRA RETTE	
Elemento geometrico	Didascalia elemento	Didascalia elemento rappresentativo	Nomenclatura elemento rappresentativo	Definizione geometrica dell'elemento rappresentativo	Definizione fisica dell'elemento rappresentativo	Definizioni grafica e descrittiva degli elementi geometrici	Relazione insiemistica sintetica delle leggi del parallelismo tra elementi geometrici diversi
Retta	r	T_{1r}	1^a traccia	punto	reale		Formalizzazione esplicativa
		T_{2r}	2^a traccia	punto	reale		
		r'	1^a immagine o 1^a proiezione	retta	virtuale		
		r"	2^a immagine o 2^a proiezione	retta	virtuale		
Piano	α		1^a traccia	retta	reale		Formalizzazione applicativa
			2^a traccia	retta	reale		

04.01.01.04. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA O DEDUTTIVA

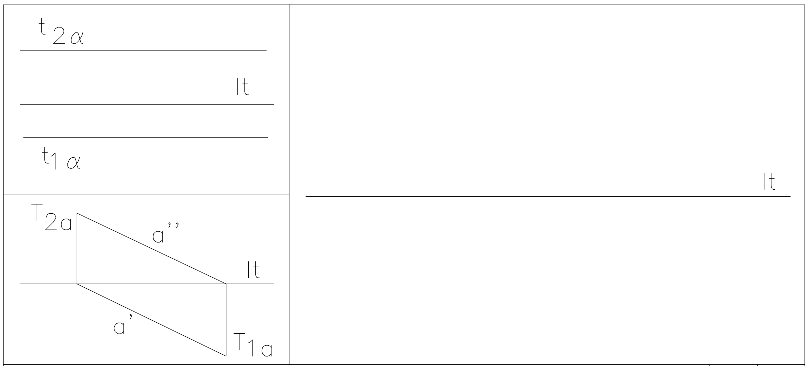
Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative al parallelismo tra retta e piano basato sul parallelismo tra rette.

Data la seguente formalizzazione esplicativa definire i quesiti a lato.

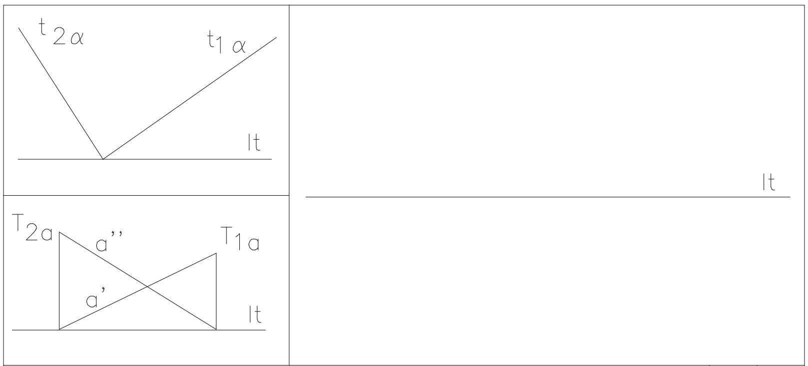




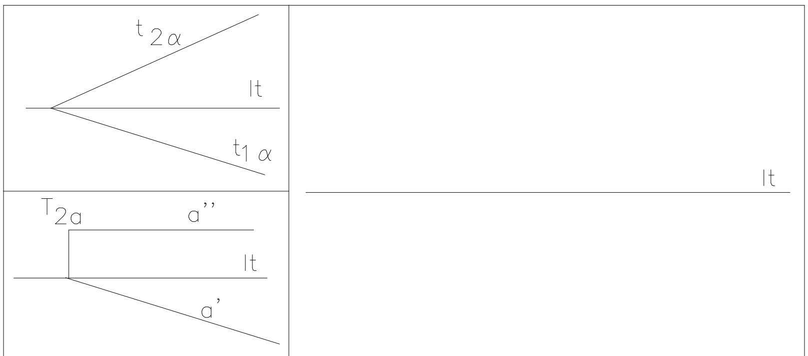
Esercizio 23– La retta è parallela al piano? SI NO



Esercizio 24– La retta è parallela al piano? SI NO



Esercizio 25– La retta è parallela al piano? SI NO



Esercizio 26– La retta è parallela al piano? SI NO

Considerazioni e note

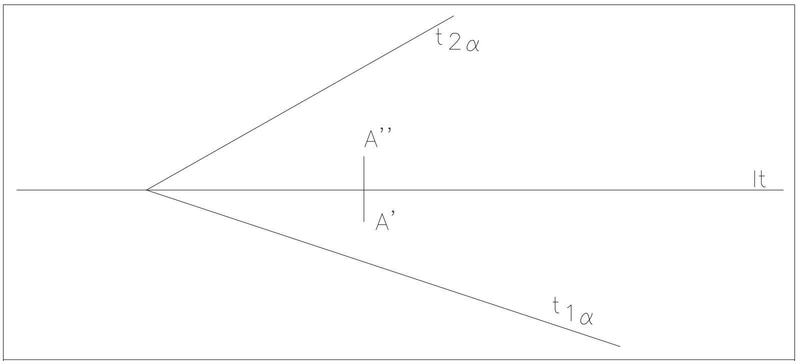
04.01.01.05. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA APPLICATIVA O IMPOSITIVA

Seguono alcune esemplificazioni grafiche riferite all’aspetto applicativo del parallelismo tra retta e piano basato sul parallelismo tra rette.

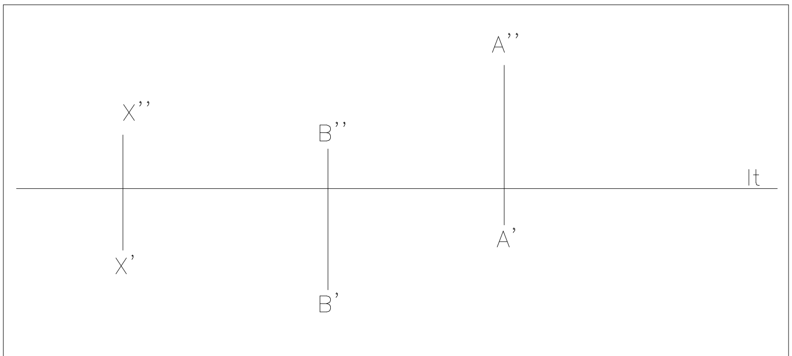
Data la seguente formalizzazione applicativa definire i quesiti a lato.

$r // \alpha \rightarrow r // s \in \alpha \rightarrow \begin{cases} r' // s' \\ r'' // s'' \end{cases} \quad \begin{cases} T_{1s} \in t_{1\alpha} \\ T_{2s} \in t_{2\alpha} \end{cases}$

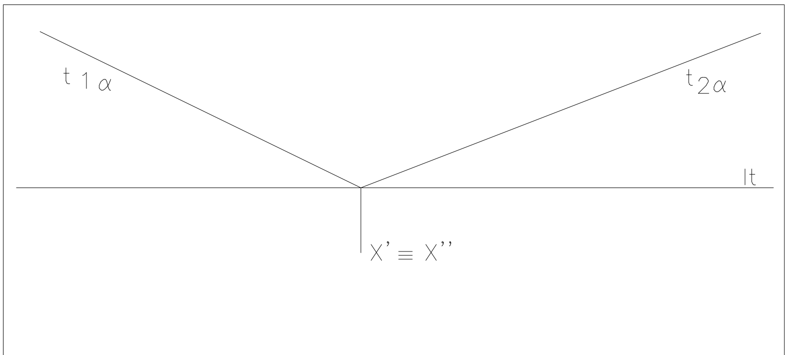
Considerazioni e note



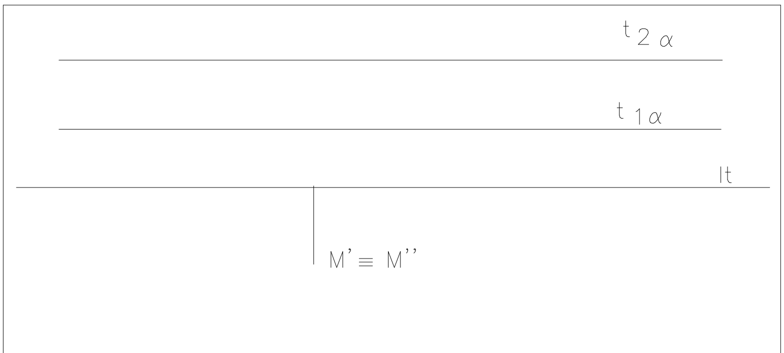
Esercizio 27– Costruire per A b//α



Esercizio 28– Costruire per X α//(r⊂A, r⊂B)

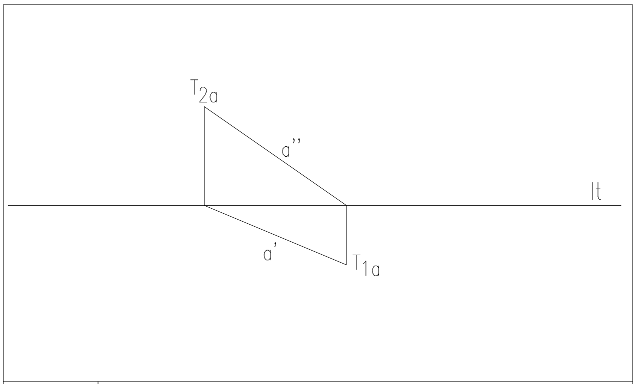


Esercizio 29– Costruire per X un piano β // α

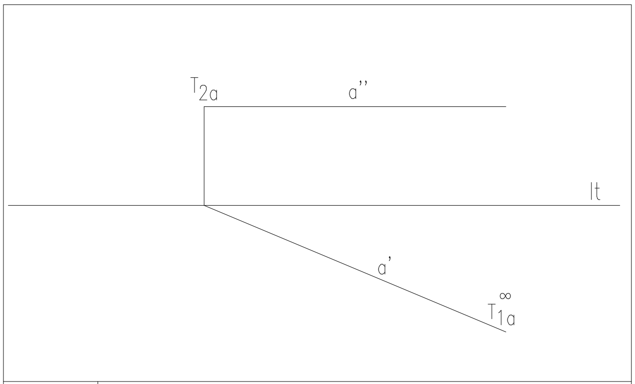


Esercizio 30– Costruire per M una retta parallela al piano α

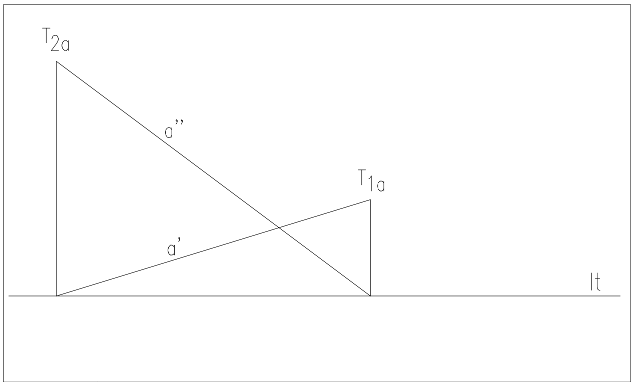
04.01.01.06. PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA RETTA E PIANO DA RISOLVERE MEDIANTE IL PARALLELISMO TRA RETTE



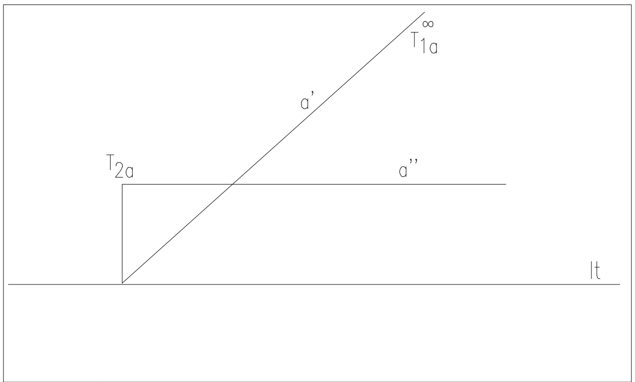
Tema 25 Definire e rappresentare un piano $\alpha // a$



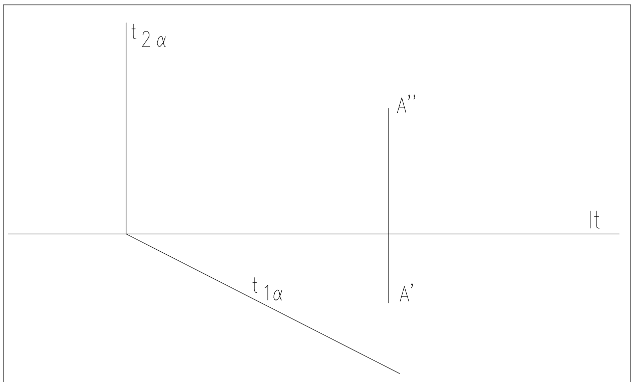
Tema 26 Definire e rappresentare un piano $\alpha // a$



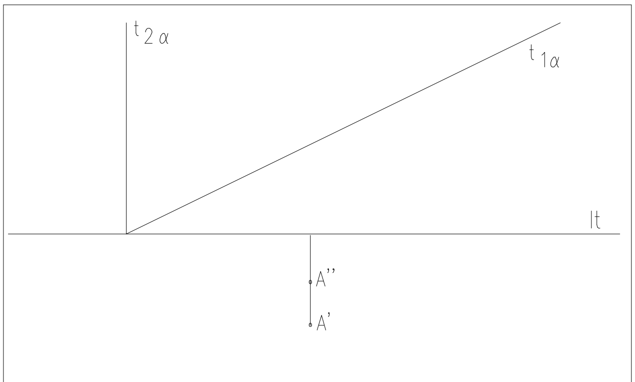
Tema 27 Definire e rappresentare un piano $\alpha // a$



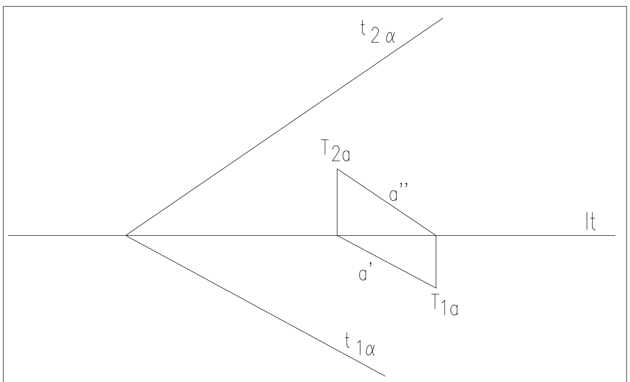
Tema 28 Definire e rappresentare un piano $\alpha // a$



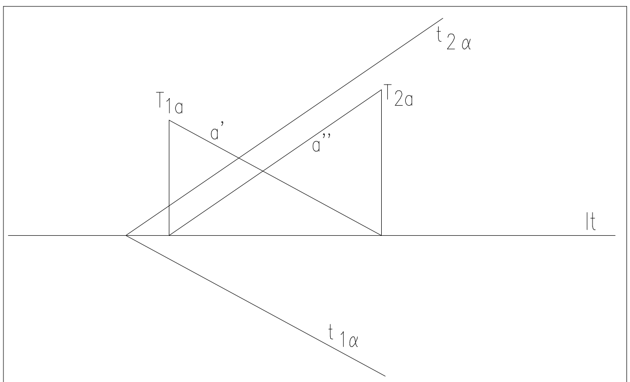
Tema 29 Definire e rappresentare $(x \subset A) // \alpha$



Tema 30 Definire e rappresentare $(x \subset A) // \alpha$



Tema 31 Verificare se $a // \alpha$



Tema 32 Verificare se $a // \alpha$

04.01.01.07 TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI

01. Data la retta $r(T_{1r}=3;\ T_{2r}=5)$ rappresentare un piano α tale che sia α//r.

02. Data la retta s(T1s=-5; T2s=1) rappresentare un piano β tale che sia β//s.

03. Dati i punti A(A'=3; A''=6), B(B'=5; B''=2), C(C'=1; C''=7) definire e rappresentare la retta r⊂(A,B) quindi costruire e rappresentare un piano α tale che sia (α⊂C)//r.

04. Dati i punti X(X'=3; X''=-6), Y(Y'=-5; Y''=2), W(W'=-1; W''=-7) definire e rappresentare la retta s⊂(X,Y) quindi costruire e rappresentare un piano α tale che sia (α⊂W)//s.

05. Dati i punti A(A'=2; A''=6), B(B'=5; B''=5) definire un piano α⊂A quindi condurre per B una retta r tale che sia (r⊂B)//α.

06. Dati i punti C(C'=-3; C''=3), D(D'=-5; D''=5= definire un piano β che sia (β⊂C) quindi condurre per il punto D una retta s tale che sia (s⊂D)//β.

07. Dati i punti E(E'=2; E''=5), F(F'=5; F''=-2) definire un piano γ che sia (γ⊂E) quindi condurre per il punto F una retta m tale che sia (m⊂F)//γ.

08. Dati i punti G(G'=-2; G''=6), H(H'=2; H''=-6) definire un piano δ che sia (δ⊂G) quindi condurre per il punto H una retta n tale che sia (n⊂H)//δ.

09. Dati un piano $\alpha(\angle\pi_1^+;\ \angle\pi_2^+)$ ed un punto $A(A'=-2;\ A''=4)\notin\alpha$ definire e rappresentare una retta r tale che sia (r⊂A)//α.

10. Dati un piano $\beta(\angle\pi_1^-;\ \angle\pi_2^+)$ ed un punto $B(B'=3;\ B''=6)\notin\beta$ definire e rappresentare una retta s tale che sia (s⊂B)//β.

11. Dati la retta $a(\angle\pi_1^+;\ \angle\pi_2^+)$ ed il punto $A(A'=4;\ A''=5)\notin a$, definire e rappresentare un piano α tale che sia (α⊂A)//a.

12. Dati la retta $b(\angle\pi_1^+;\ //\pi_2^+)$ ed il punto $B(B'=-4;\ B''=-5)\notin b$, definire e rappresentare un piano β tale che sia (β⊂B)//b.