

03.05. ALCUNI CASI PARTICOLARI DI PARALLELISMO TRA PIANI

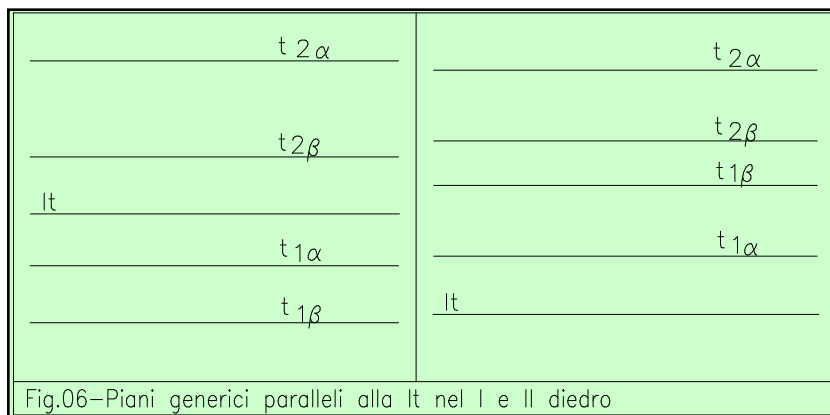
La condizione di parallelismo va impostata tra elementi geometrici aventi stesse caratteristiche, come ad esempio due o più piani generici $[(\alpha // \beta // \gamma) \angle \pi_1, (\alpha // \beta // \gamma) \angle \pi_2]$; due o più piani orizzontali $[(\alpha // \beta // \gamma) // \pi_1]$; due o più piani di profilo $[(\alpha // \beta // \gamma) \perp \pi_1, (\alpha // \beta // \gamma) \perp \pi_2]$.

Altrimenti, date le tracce dei piani è necessario verificare la sussistenza o meno di T_r^∞ per definire l'esistenza o meno del rapporto geometrico-descrittivo definito, costante e continuo relativo alla condizione del parallelismo.

Per alcune tipologie di piano è necessario, però, fare qualche precisazione, sia per quanto attiene l'aspetto dell'impostazione delle leggi che per quanto attiene il processo della verifica.

03.05.01. PIANI GENERICI PARALLELI ALLA lt

Un caso particolare si verifica quando si tratta la tipologia di "piano generico parallelo alla lt ". In questo caso se si opera, ad esempio, con due



piani α e β aventi queste caratteristiche, le quattro tracce $t_{1\alpha}$, $t_{1\beta}$, $t_{2\alpha}$, $t_{2\beta}$ saranno parallele tra loro, (Fig.06) il che può trarre facilmente in inganno in quanto si verifica la condizione fondamentale:

$$\alpha // \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta \Rightarrow r^\infty$$

che in questo caso non è sufficiente, né per imporre, né per verificare la condizione di parallelismo tra i due piani dati.

A questo punto è bene ricordare la formalizzazione dinamico-descrittiva del piano espressa come di seguito.

Piano rigato

$$\pi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \overline{r} \}$$

Piano punteggiato

$$\pi = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \{ \bar{P} \}$$

Ciò chiarisce che un piano qualsiasi π può essere riguardato come “piano rigato” ⁽¹⁴⁾ o “piano punteggiato” ⁽¹⁵⁾ a seconda dell’elemento generatore che si ritiene opportuno assumere per la discussione del problema.

Se consideriamo il “piano rigato”, ricordando che la condizione di parallelismo è una legge geometrico-descrittiva “concreta, definita, costante e continua”, allora è possibile operare, invece che con le tracce dei piani, con le rette del “piano rigato” facendo in modo che questi quattro presupposti risultino impostati o verificati tra due o più rette qualsiasi appartenenti ai due piani.

03.05.01.01. VERIFICA E IMPOSIZIONE MEDIANTE LA LEGGE DEL PARALLELISMO TRA RETTE DEI PIANI

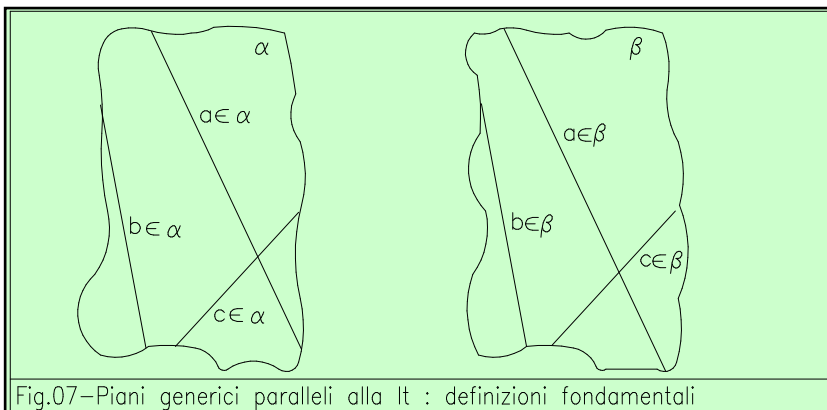


Fig.07–Piani generici paralleli alla lt : definizioni fondamentali

Se i piani sono paralleli significa che ad una retta dell’uno corrisponde una retta dell’altro, parallela alla prima e viceversa. (Fig.07).

Quindi sia per verificare sia per impostare il parallelismo

tra due o più piani, ricadenti nella tipologia oggetto di discussione, è necessario fare riferimento alle leggi del parallelismo tra rette, rette che -ovviamente- devono appartenere ai piani in esame.

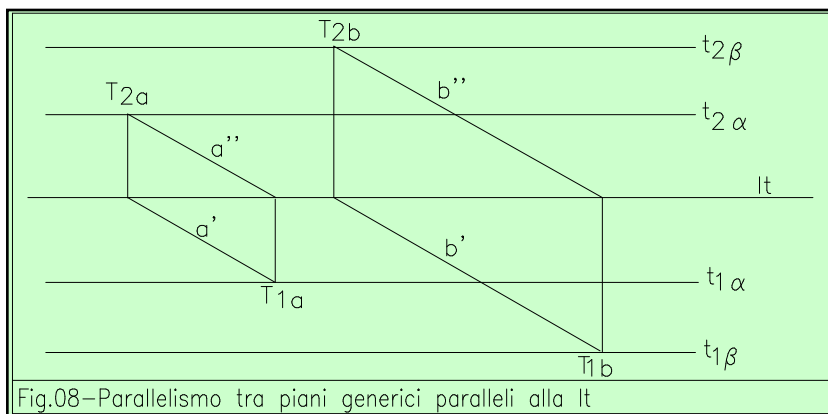
Ad esempio, dati i due piani α e β caratterizzati, dal punto di vista geometrico, come di seguito

$$\alpha \mid \alpha \angle \pi_1, \alpha \angle \pi_2, \alpha // lt$$

$$\beta \mid \beta \angle \pi_1, \beta \angle \pi_2, \beta // lt$$

per verificare se $\beta // \alpha$ è necessario procedere come di seguito (Fig.08).

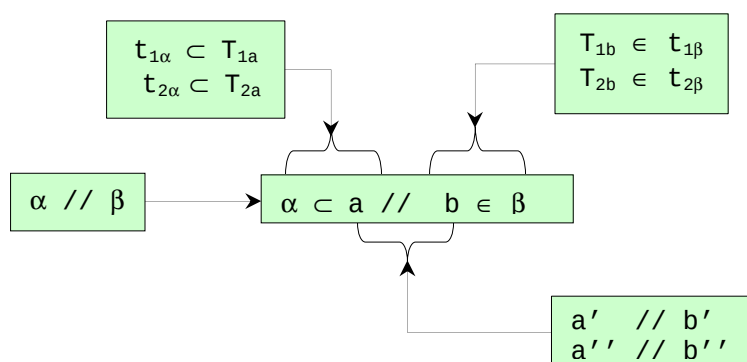
Definita una retta generica $a \in \alpha$ costruire, mediante le condizioni di parallelismo tra rette, una retta $b // a$ per cui sarà $a' // b'$ ed anche $a' // b''$.



Le proiezioni della retta b determinano le due tracce T_{1b} e T_{2b} che costituiscono i punti per i quali passano le tracce $t_{1\beta}$ e $t_{2\beta}$ del piano $\beta // \alpha$.

In questo caso, dati due piani α e β ,

come sopra definiti, la legge sarà espressa dalla seguente formalizzazione esplicativa o deduttiva insiemistico-descrittiva



Questa doppia condizione può essere, verbalmente, così espressa:

Due piani generici, paralleli alla lt , sono tra loro paralleli se, e solo se, ciascuno di essi contiene una retta parallela ad una retta dell'altro piano.

In forma sintetica insiemistico-descrittiva, la legge di cui sopra sarà espressa come di seguito.

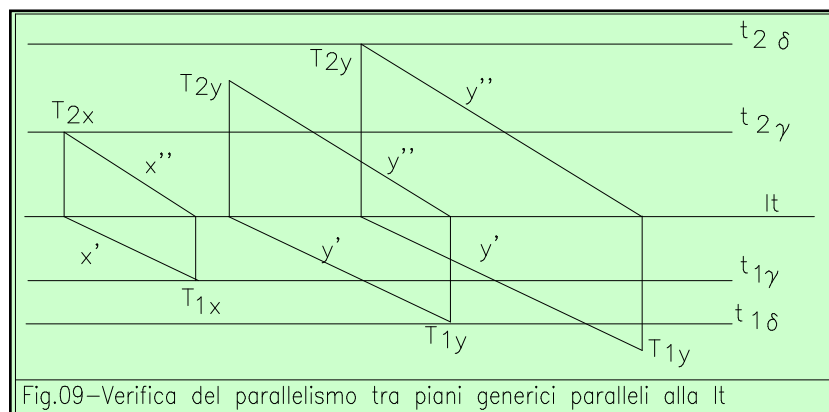
$$\alpha(\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) // \beta(\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \Rightarrow \alpha \subset a \mid a // b \wedge b \in \beta$$

e reciprocamente

$$\beta(\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) // \alpha(\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \Rightarrow \beta \subset b \mid b // a \wedge a \in \alpha$$

dove, i legami di contenimento e di appartenenza, sono esplicitati nella formalizzazione di cui sopra.

Data la proiezione ortogonale dei piani γ e δ , della fig. 09 ricadenti nella tipologia in esame, per verificare l'esistenza o meno della condizione di parallelismo procediamo come di seguito.

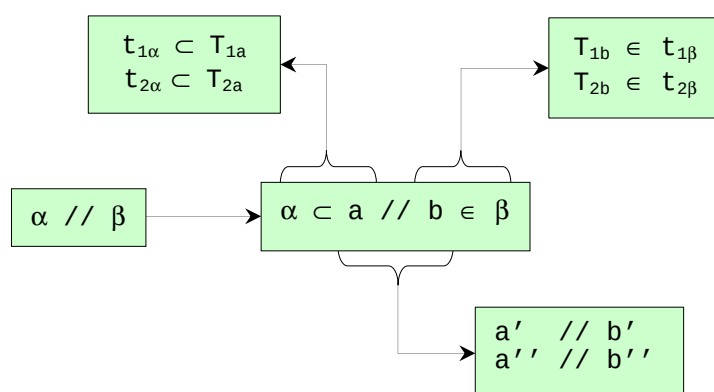


Conduciamo per γ una retta generica x qualsiasi che sia però $x \in \gamma$. Poi per δ una retta y che sia parallela alla retta x ; per cui sarà $y' // x'$. Dovendo essere $y \in \delta$, determiniamo $T_{1y} \in t_{1\delta}$ da cui è facile definire

$y'' // x''$. Definita y'' può accadere che $T_{2y} \in t_{2\delta}$. Allora il parallelismo delle due distinte rette, appartenenti ai due piani, chiarisce anche il parallelismo dei piani. Altrimenti, se $T_{2y} \notin t_{2\delta}$, -come nel disegno di fig.09- la risoluzione grafica vuol significare che la retta $y \notin \delta$ quindi i due piani non sono paralleli. Le stesse considerazioni possono svilupparsi nel caso in cui si opera per prima il parallelismo tra le proiezioni seconde $x'' // y''$ determinando quindi $T_{2y} \in t_{2\delta}$ verificando, poi, l'appartenenza o meno di T_{1y} a $t_{1\delta}$.

Se la condizione deve essere imposta, allora, è necessario operare secondo una procedura reciproca a quella analizzata di sopra. Definito, quindi, un certo piano $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt)$ perché un secondo piano $\beta (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt)$ sia parallelo al primo, è necessario che esso contenga una retta b parallela ad una qualsiasi retta a del piano dato α .

La formalizzazione impositiva insiemistico-descrittiva può essere sintetizzata come di seguito,



mentre la definizione verbale può essere recitata come appresso.

Perché due piani generici paralleli alla lt siano paralleli è necessario che tali siano due distinte rette appartenenti ciascuna ad uno di essi.

Pertanto la procedura è quella evidenziata nella figura 10 esposta di seguito.

Definite le tracce del piano $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt)$, costruiamo la retta $a \in \alpha$ per cui sarà $T_{1a} \in t_{1\alpha}$ ed anche $T_{2a} \in t_{2\alpha}$. Definire quindi le proiezioni della retta $a (a'; a'')$

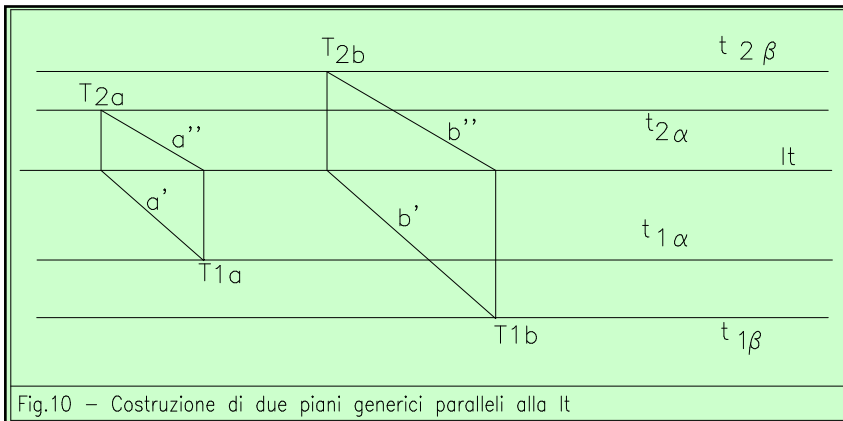


Fig.10 - Costruzione di due piani generici paralleli alla lt

costruiamo le proiezioni di una retta $b // a$ per cui sarà $a' // b'$ ed anche $a'' // b''$. Definire le proiezioni della retta b , con facilità si individuano le tracce T_{1b} e T_{2b} della stessa, tracce per le quali condurre $t_{1\beta} // t_{1\alpha}$ ed

anche $t_{2\beta} // t_{2\alpha}$.

03.05.01.02. VERIFICA E IMPOSIZIONE MEDIANTE LA LEGGE DELL'APPARTENENZA

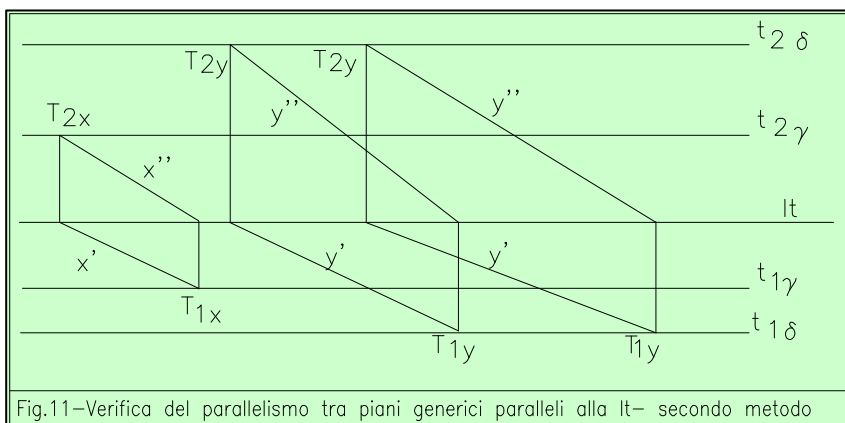


Fig.11 - Verifica del parallelismo tra piani generici paralleli alla lt - secondo metodo

La verifica o imposizione del parallelismo tra due o più piani ricadenti in questa tipologia può essere effettuata anche in questo secondo modo, privilegiando la legge dell'appartenenza come sviluppato, graficamente, nella figura 11.

Dati i piani γ e δ , la procedura si sviluppa attraverso vari passaggi come esplicitati nel seguito della presente.

Costruita una retta generica x appartenente al piano γ , $x \in \gamma$, si definisce una proiezione $y' // x'$ di una retta $y \in \delta$. Definita, quindi, T_{1y} si è in grado di completare la rappresentazione di y con la ricerca di T_{2y} e quindi di y'' . A conclusione di questa operazione la retta $y \in \delta$ risulterà completamente definita, in tutti e quattro gli elementi rappresentativi. Analizzando, ora, la seconda

proiezione può accadere che $y'' \angle x''$, allora sarà anche $\delta \angle \gamma$; se invece accade che $y'' // x''$ si può asserire che anche $\delta // \gamma$.

Le identiche considerazioni possono svilupparsi nel caso in cui si opera partendo dal parallelismo delle seconde proiezioni.

Costruito, infatti, $y'' // x''$ si determina $T_{2y} \in t_{2\delta}$ perché $y \in \delta$ quindi si completa la determinazione di y' mediante la definizione di $T_{1y} \in t_{1\delta}$. Fatto ciò si analizzano le prime proiezioni e, se accade che $y' // x'$ allora sarà anche $\delta // \gamma$; se invece accade che $y' \angle x'$, allora sarà anche $\delta \angle \gamma$. La formalizzazione insiemistico-descrittiva, sia per l'aspetto deduttivo sia per l'aspetto impositivo, assume la stessa fisionomia, solamente che in questo caso si predilige la legge dell'appartenenza. Stante quanto detto, le due formalizzazioni possono essere riproposte nelle forme e con le medesime definizioni verbali precisando che la verifica o l'imposizione avviene attraverso l'enfatizzazione delle leggi dell'appartenenza e reciproca contenenza.

03.05.02. PIANI GENERICI INCIDENTI LA lt (∇lt)

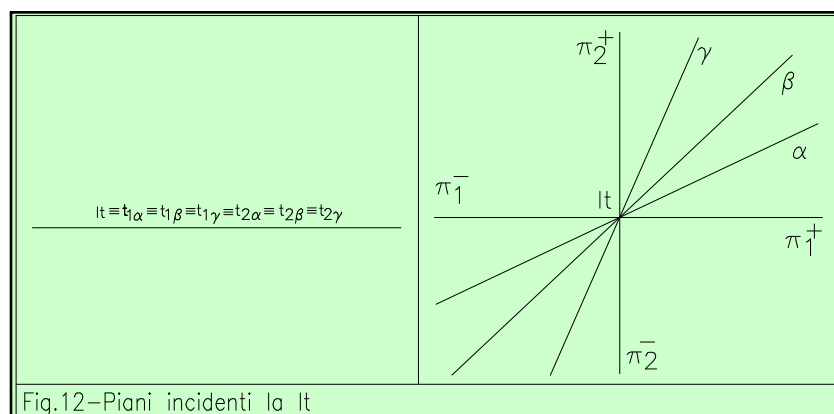


Fig.12-Piani incidenti la lt

Un altro caso particolare si verifica quando si tratta la tipologia del "piano generico incidente la lt " che esaminiamo di seguito.

Poiché ogni piano ricadente in questa tipologia ha le tracce

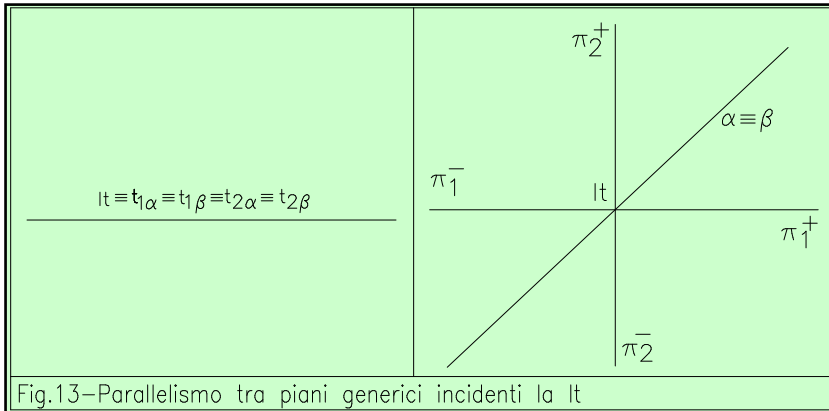
coincidenti con la lt , rappresentare due o più piani con queste caratteristiche equivale ad individuare tutte le tracce dei piani coincidenti con la lt come accade in fig. 12.

Il problema, vuoi della verifica, vuoi dell'imposizione della condizione di parallelismo resta irrisolto in quanto la lt , essendo il luogo geometrico dei punti uniti, non esplicita la posizione dei piani α , β , γ , ecc. nello spazio del diedro.

Ricordando che "il parallelismo" è un legame descrittivo concreto definito, continuo e costante, tra elementi geometrici; nel caso in esame, si riscontrano le seguenti situazioni.

Due piani generici α e β che hanno le tracce "incidenti la lt ", per rispettare le proprietà di cui sopra, devono essere coincidenti $\alpha \equiv \beta$ come

graficizzato nella successiva figura 13. In questo caso le quattro proprietà si caratterizzano come di seguito:



1. Rapporto “concreto”:
le tracce pur se coincidenti con la lt sono rette reali.
2. Rapporto “definito”:
distanza nulla tra ogni elemento dei piani.
3. Rapporto “costante”:
ad ogni punto di α corrisponde un solo

punto di β .

4. Rapporto “continuo”: per ogni retta dinamica appartenente ad α esiste una sola retta dinamica appartenente a β nel rispetto della seguente formalizzazione dinamico-insiemistica

$$\forall \bar{r} \in \alpha \Rightarrow \exists ! \bar{s} \in \beta$$

e viceversa

$$\forall \bar{s} \in \beta \Rightarrow \exists ! \bar{r} \in \alpha$$

Possiamo concludere, quindi, con la seguente definizione.

Due (o più) piani generici incidenti la lt per essere paralleli devono essere coincidenti.

Il concetto può essere rappresentato, con la simbologia insiemistico-descrittiva, dalla seguente espressione:

$$(\alpha \angle \pi_1, \alpha \angle \pi_2, \alpha \nabla lt) // (\beta \angle \pi_1, \beta \angle \pi_2, \beta \nabla lt) \longrightarrow \alpha \equiv \beta$$

Quanto detto vale anche per il processo di verifica, per cui si può enunciare quanto di seguito.

Due (o più) piani generici incidenti la lt se sono coincidenti sono anche paralleli.

Il concetto può essere rappresentato, in forma insiemistico-descrittiva, dalla seguente espressione

$$(\alpha \angle \pi_1, \alpha \angle \pi_2, \alpha \nabla lt) \equiv (\beta \angle \pi_1, \beta \angle \pi_2, \beta \nabla lt) \longrightarrow \alpha // \beta$$

Può accadere, anche, che due piani generici α e β pur avendo le tracce “incidenti la lt” non verificano le proprietà del rapporto descrittivo, concreto, definito, costante e continuo di cui sopra.

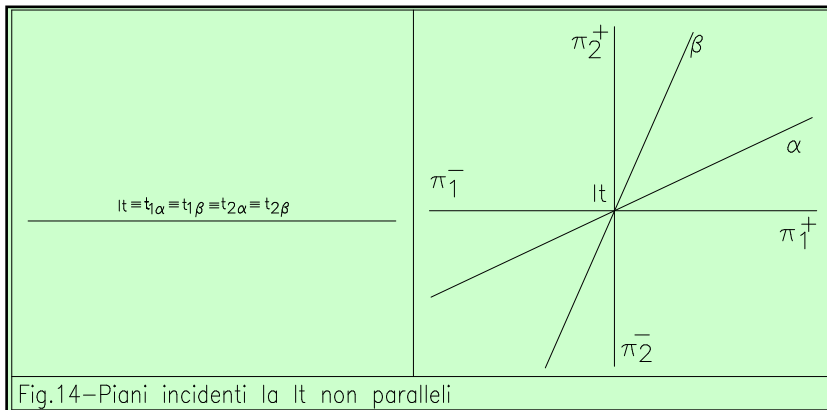


Fig.14–Piani incidenti la lt non paralleli

Allora, come è facile leggere nel disegno di figura 14, si verifica che il rapporto descrittivo, concreto, definito, non è né costante né continuo in quanto la distanza tra i piani è variabile e

diversa da punto a punto.

Mancando la verifica di queste tre proprietà si può concludere che i due piani, pur aventi le tracce “incidenti alla lt”, non sono paralleli in quanto non coincidenti.

Questa caratteristica viene sintetizzata dalla seguente espressione geometrico-descrittiva.

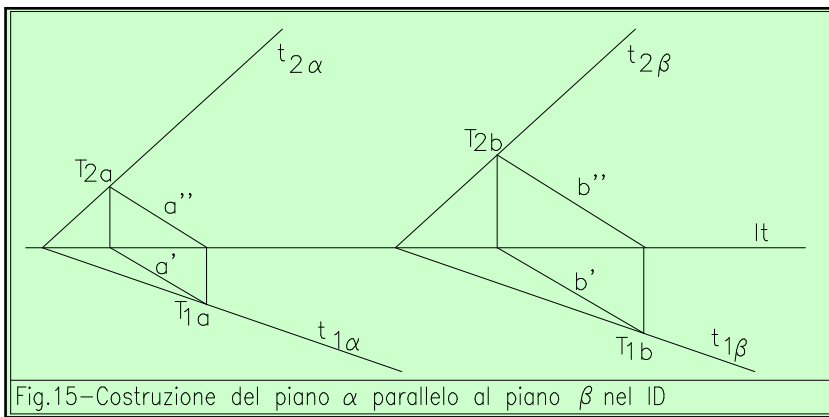
$$(\alpha \angle \pi_1, \alpha \angle \pi_2, \alpha \cap lt) \not\equiv (\beta \angle \pi_1, \beta \angle \pi_2, \beta \cap lt) \longrightarrow \alpha \angle \beta$$

03.05.03. NOTAZIONE CONCLUSIVA

A conclusione dell’analisi delle situazioni particolari è necessario chiarire, comunque, che la seguente relazione fondamentale insiemistico-

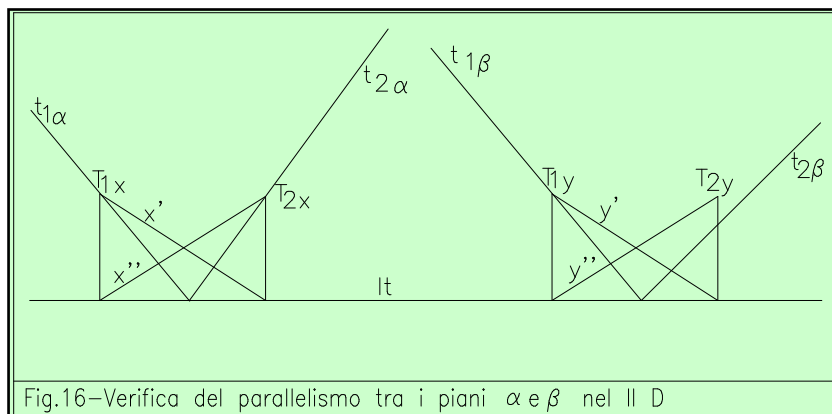
$$\alpha // \beta \longrightarrow \alpha \subset a \mid a // b \wedge b \in \beta$$

descrittiva e le relative esplicitazioni possono essere applicate –sia nella fase di costruzione che in quella di verifica del parallelismo– anche ai piani che non ricadono in queste tipologie come nei disegni specifici delle seguenti figure 15 e 16.



Nella figura 15, infatti, il parallelismo tra i due piani $\alpha//\beta$ è stato costruito per mezzo degli elementi geometrici legati tra loro come espresso dalla seguente relazione.

$$a \in \alpha \wedge a // b \wedge b \in \beta \longrightarrow \alpha // \beta$$



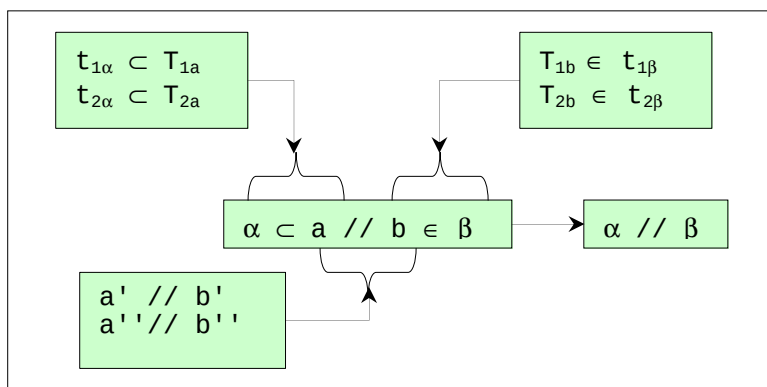
Nella figura 16, invece, avviene che $\alpha \nparallel \beta$ perché i legami tra gli elementi geometrici, piano e retta, sono quelli indicati nella formalizzazione che segue.

$$x \in \alpha \wedge y // x \wedge y \notin \beta \longrightarrow \alpha \nparallel \beta$$

03.05.04. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA ESPLICATIVA E DEDUTTIVA

Seguono alcune esemplificazioni grafiche relative alle tipologie di piani trattate nei casi particolari.

Data la formalizzazione insiemistico-descrittiva, in forma esplicativa o deduttiva, riportata a fianco, con le relative esPLICITAZIONI risolvere i quesiti sottostanti



Considerazioni e note

$t_{2\alpha}$

$t_{1\alpha}$

It

$t_{1\beta}$

$t_{2\beta}$

Esercizio 17- I due piani sono paralleli?

SI

NO

$t_{2\alpha}$

$t_{1\alpha}$

$t_{1\beta}$

$t_{2\beta}$

It

Esercizio 18- I due piani sono paralleli?

SI

NO

$t_{2\beta}$

$t_{2\alpha}$

It

$t_{1\alpha}$

$t_{1\beta}$

Esercizio 19- I due piani sono paralleli?

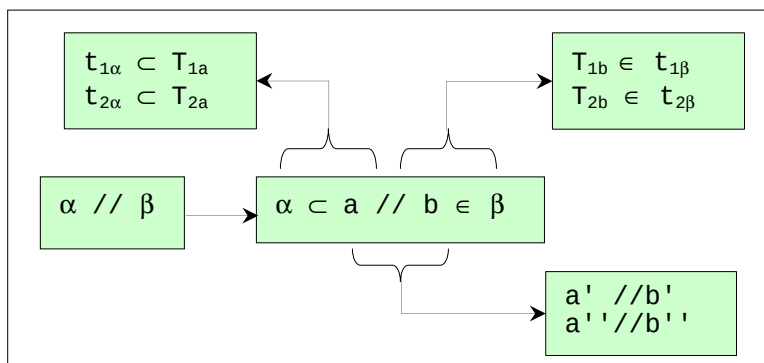
SI

NO

03.05.05. ESEMPLIFICAZIONI GRAFICHE IN FORMA IMPOSITIVA O APPLICATIVA

Seguono, anche per questa tipologia di piani, alcune esemplificazioni grafiche di parallelismo nella forma impositiva.

Data la formalizzazione insiemistico-descrittiva, in forma impositiva o applicativa, riportata a fianco, con le relative esplicitazioni risolvere i quesiti sottostanti



Considerazioni e note

$t_{2\alpha}$

lt

$t_{1\alpha}$

Esercizio 20—Dato il piano α costruire e definire $\beta // \alpha$

$t_{1\alpha}$

$t_{2\alpha}$

lt

$A' \equiv A''$

Esercizio 21—Dato il piano α costruire e definire $(\beta // \alpha) | \beta \subset A$

$t_{1\alpha}$

$t_{2\alpha}$

lt

A'

$t_{1\beta}$

Esercizio 22—Dato il piano α costruire e definire $(\beta // \alpha) | \beta \subset A$

03.05.06. PROPOSTE DI TEMI GRAFICI SULLA CONDIZIONE DI PARALLELISMO TRA PIANI
GENERICI PARALLELI ALLA lt

Tema 17
Costruire un piano $\beta // \alpha \mid A \in \beta$

Tema 18
Costruire un piano $\beta // \alpha \mid A \in \beta$

Tema 19
Costruire un piano $\beta // \alpha \mid \beta \subset A$

Tema 20
Costruire un piano $\beta // \alpha \mid \beta \subset A$

Tema 21
Costruire $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset A$; $\beta (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset B \mid \alpha // \beta$

Tema 22
Costruire $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset A$; $\beta (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset B \mid \alpha // \beta$

Tema 23
Costruire $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset A$; $\beta (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset B \mid \alpha // \beta$

Tema 24
Costruire $\alpha (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset A$; $\beta (\angle \pi_1 \angle \pi_2 // lt) \subset B \mid \alpha // \beta$

03.05.07. TEMI SCRITTI DA VOLGERE E SVILUPPARE IN FORMA DI ELABORATI GRAFICI

01. Dati il piano $\alpha(\angle\pi_1^+ \angle\pi_2^+ // lt)$ ed il punto $A(A'=3; A''=3)$ tali che sia $A \notin \alpha$, definire e rappresentare un piano $\beta // \alpha | \beta \subset A$.
02. Dati il piano $\alpha(\angle\pi_1^- \angle\pi_2^+ // lt)$ ed il punto $B(B'=-3; B''=5)$ tali che sia $B \notin \alpha$, definire e rappresentare un piano $\beta // \alpha | \beta \subset B$.
03. Dati il piano $\alpha(\angle\pi_1^- \angle\pi_2^- // lt)$ ed il punto $C(C'=4; C''=-4)$ tali che sia $C \notin \alpha$, definire e rappresentare un piano $\beta // \alpha | \beta \subset C$.
04. Dati il piano $\alpha(\angle\pi_1^+ \angle\pi_2^- // lt)$ ed il punto $D(D'=1; D''=2)$ tali che sia $D \notin \alpha$, definire e rappresentare un piano $\beta // \alpha | \beta \subset D$.
05. Data la retta $a(//\pi_1^+ // \pi_2^+)$ ed un punto $(B \in WID | B \notin a)$, definire e rappresentare $\alpha // \beta | (\alpha \subset a; \beta \subset B)$.
06. Data la retta $a(//\pi_1^- // \pi_2^+)$ ed un punto $(B \in WIID | B \notin a)$, definire e rappresentare $\alpha // \beta | (\alpha \subset a; \beta \subset B)$.
07. Data la retta $r(//\pi_1^- // \pi_2^-)$ ed un punto $(X \in WIIID | X \notin r)$, definire e rappresentare $\gamma // \delta | (\gamma \subset r; \delta \subset X)$.
08. Data la retta $r(//\pi_1^+ // \pi_2^-)$ ed un punto $(X \in WIVD | X \notin r)$, definire e rappresentare $\gamma // \delta | (\gamma \subset r; \delta \subset B)$.
09. Dati i punti $A(A'=1; A''=3)$, $B(B'=2; B''=4)$, definire e rappresentare i piani $\alpha // \beta | (\alpha \subset A; \beta \subset B)$.
10. Dati i punti $C(C'=-2; C''=4)$, $D(D'=-1; D''=1)$, definire e rappresentare i piani $\alpha // \beta | (\alpha \subset C; \beta \subset D)$.
11. Dati i punti $E(E'=-2; E''=-4)$, $F(F'=-4; F''=-1)$, definire e rappresentare i piani $\alpha // \beta | (\alpha \subset E; \beta \subset F)$.
12. Dati i punti $G(G'=1; G''=-2)$, $H(H'=2; H''=-4)$, definire e rappresentare i piani $\alpha // \beta | (\alpha \subset G; \beta \subset H)$.